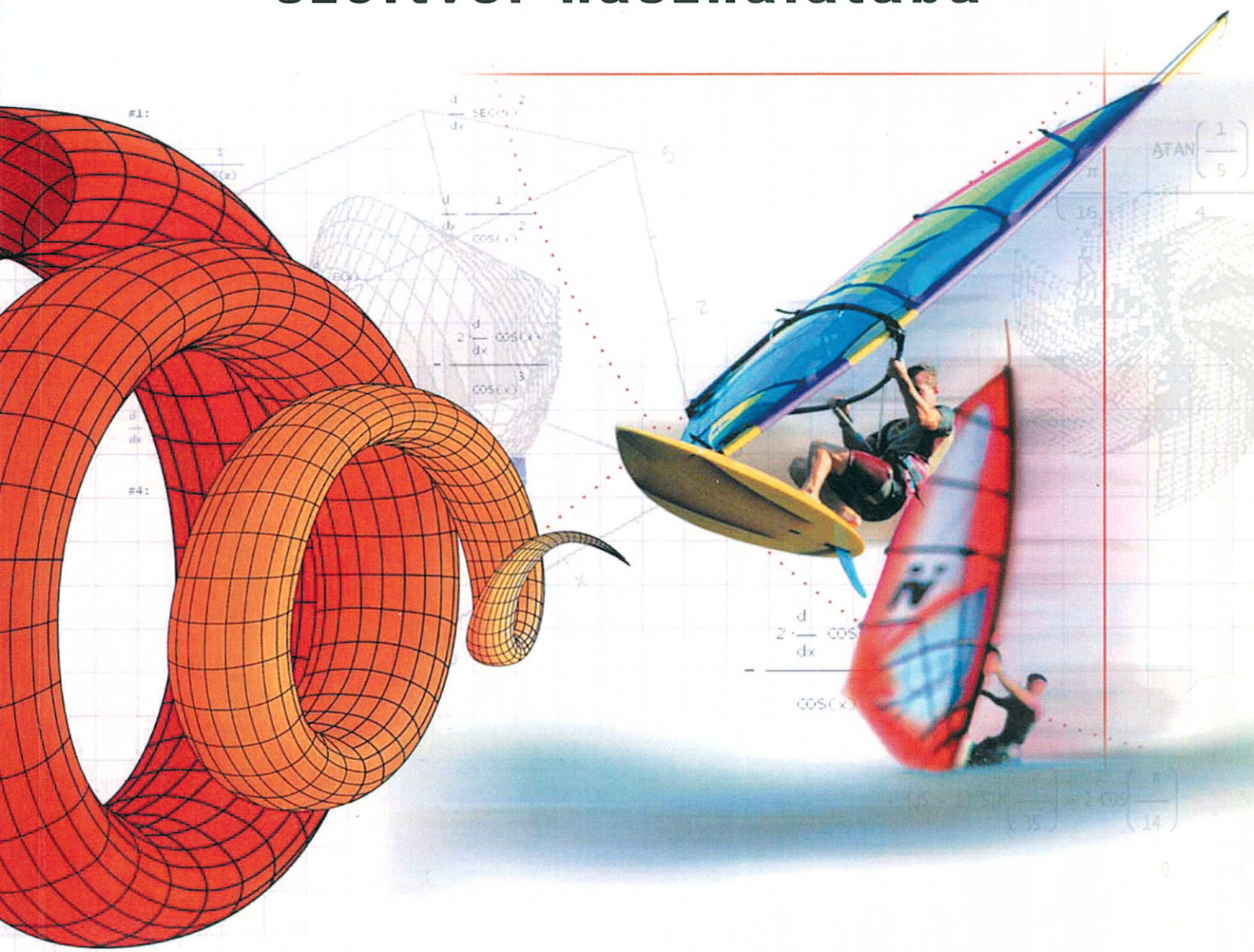
Texas Instruments

Bevezetés a

Derive™ 6

szoftver használatába



Bernhard Kutzler & Vlasta Kokol-Voljc

Matematika könnyen, gyorsan és egyszerűen

Bernhard KUTZLER
Vlasta KOKOL-VOLJC

Bevezetés a DERIVE$_{TM}$ 6 szoftver használatába

Egy könyv arról, hogyan használjuk a DERIVE 6 programot,
és hogyan tanítsunk vele

A mű szerzői és eredeti címe, illetve a termék védelmi információk:

Kutzler, Bernhard & Kokol-Voljc, Vlasta
Introduction to DERIVE 6
2003

© 2003 Kutzler & Kokol-Voljc OEG, Austria
1st Edition, 1st Printing: September 2003

Typesetting: Bernhard Kutzler, Linz, Austria
Cover art: Texas Instruments, Dallas, Texas, USA

The authors and publisher make no warranty of any kind, expressed or implied, with regard to the documentation contained in this book. The author and publisher shall not be liable in any event for incidental or consequential damages in connection with, or arising out of, the furnishing, performance or use of this text.
No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form, or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission, in writing, from the publisher.

DERIVE™ is a trademark of Texas Instruments, Dallas, Texas USA
WINDOWS™ is a registered trademark of Microsoft Corp.

A magyarországi kiadást az Új Calculus számítógép-alkalmazási Bt támogatja, felelős Csicsman József ügyvezető.

A magyar változat fordítója Süli István és Baranyai Péter, lektora Fényes Cecília és Kőhegyi János, a szoftver fordításának irányítója Kőhegyi János. A számítástechnikai és a kiadvány szerkesztési munkákat Baranyai Péter és Lukács Adrienn végezte.

A szerző és a kiadó nem ad semmilyen garanciát a kézikönyvben leírt kifejezések vagy azok implementációjának sikeres felhasználására. A szerző és a kiadó nem vállal felelősséget a kiadványban leírt szövegek helytelen vagy hibás alkalmazásából eredő károkért.

Minden jog fenntartva. A kiadó elsődleges írásbeli engedélye nélkül nem másolható, nem reprodukálható, nem tölthető le vagy nem adható tovább semmilyen elektronikus, mechanikus, másolási vagy egyéb technikával a kiadvány semelyik része sem.

A DERIVE a Texas Instruments Incorporated védett terméke.
A WINDOWS 98, WINDOWS ME, WINDOWS 2000 és a WINDOWS XP a Microsoft Corporation törvény által védett terméke.

Tartalomjegyzék

Bevezetés 1

1. fejezet: Az első lépések 3

2. fejezet: A polinomok zérus helyeinek megkeresése 23

3. fejezet: A rész és az egész – részkifejezések 43

4. fejezet: Egyenletek és egyenlőtlenségek 59

5. fejezet: Közelítő és pontos számítások 75

6. fejezet: Sorozatok és a görbék családjai 87

7. fejezet: Kísérletek a térben 109

8. fejezet: Mi az 'egyszerű'? 123

9. fejezet: Vektorok, mátrixok és halmazok 137

10. fejezet Paraméteres ábrázolás 155

11. fejezet: Egy analitikus geometria modul 167

12. fejezet: Egy kis analízis 185

13. fejezet: Egyszerűsítési lépések megjelenítése 203

14. fejezet: Még néhány szó az ábrázolásról 215

15. fejezet: Mit tud még a DERIVE? 235

16. fejezet: TI-89, TI-92+ vagy Voyage200 típusú kézi számítógépek kommunikációja a DERIVE-val 253

17. fejezet: A DERIVE testreszabása személyes igényeinknek megfelelően 265

Még többet a DERIVE-ról 275

Melléklet A: DERIVE indítási beállítások 277

Melléklet B: A DERIVE eredeti beállításai 279

Tárgymutató 283

Előszó

A könyv megírásának az elsődleges célja a DERIVE 6 könnyed és gyors használatának megtanítása, különösen a tanárok számára.

Ezúton köszönjük meg Albert Rich-nek és Theresa Shelby-nek, a DERIVE 6 program szerzőinek, a folyamatos támogatást és segítségnyújtást a könyv megírása alatt.

Köszönjük továbbá Patricia Littelfield-nek és David Stoutemyer-nek, akik tökéletesítették a könyv nyelvezetét.

Bernhard Kutzler & Vlasta Kokol-Voljc, July 2003

A DERIVE 6 magyar változatának elkészítésénél köszönettel tartozunk Kőhegyi János matematikusnak, az ELTE Informatika Kar Algoritmusok és alkalmazásaik tanszék tanárának, illetve Baranyai Péternek és Lukács Adriennek, az Új Calculus Számítógép-alkalmazási Bt. munkatársainak.

Csicsman József, 2004 október

Bevezetés

A **DERIVE** egy matematikai számítógépes program. Hasonlóan a lebegőpontos aritmetikával rendelkező tudományos számológépekhez, képes algebrai változókkal, kifejezésekkel, egyenletekkel, függvényekkel, vektorokkal és mátrixokkal dolgozni. Végre tud hajtani numerikus számításokat, és ábrázolhatunk vele algebrai, trigonometriai, függvényeket 2 illetve 3 dimenzióban.

A program fő erőssége a szimbolikus algebra és az ábrázolás. Tökéletes eszköz matematika feladatok megoldásához és dokumentálásához, tanításhoz és tanuláshoz egyaránt.

A **DERIVE** ideális eszköz a matematika oktatatásának és tanulásának támogatására. Új lehetőséget teremt a matematika oktatásában és megértésében, azzal, hogy rendelkezik numerikus, algebrai, grafikus lehetőségekkel és ezek integrált alkalmazhatóságával. A **DERIVE** képessé tesz arra, hogy más szemszögből vizsgáljunk egyes feladatokat. A felhasználó nagyon sok témával foglalkozhat hatékonyabban, mint a hagyományos módszertanokkal. Rengeteg kérdés és probléma megoldódhat egy billentyű lenyomásával: a program alkalmazása kiküszöböli a lélekölő és feleslegesen hosszú számításokat. A **DERIVE** a mechanikus és az algoritmikus számítások elvégzésével leveszi a terhet felhasználójáról, így a tanuló több időt tölthet az alapfogalmak megértésével. Ahelyett, hogy a feladatmegoldás unalmas mechanikai számításokat követelne meg, a tanárok és diákok koncentrálhatnak más izgalmasabb és hasznosabb megoldásokra, illetve gondolkozhatnak a feladatok más megközelítésén. A **DERIVE** bizonyította, hogy magas szinten támogatja a legmodernebb matematikai koncepciók kognitív fejlesztését.

A **DERIVE** ideális eszköz mérnökök számára is, mivel gyors és hatékony hozzáférést nyújt számos matematikai művelethez, függvényhez. Ha a **DERIVE**-ot használja a matematika-feladatok megoldása során, egy fáradhatatlan, nagy teljesítményű, nagy tudású és könnyen használható matematikai segítséggel rendelkezik.

Ez a könyv a **DERIVE 6** használatának elsajátításához nyújt segítséget. Telepítse a **DERIVE 6**-ot a számítógépre. Ezután kezdje a programmal való ismerkedést az első fejezettel, ahol lépésről lépésre tanulhatja meg annak használatát. Majd a mintapéldák és az azokhoz tartozó tanácsok feldolgozásával folytassa munkáját. A szöveg fontos szerepet játszik a mintapéldákban. Több témán keresztül sajátíthatja el a megoldások menetét a **DERIVE 6**-ban. Sok példa tartalmaz didaktikai ötleteket a **DERIVE**-val támogatott oktatáshoz; ezek közül néhányat részletezünk a 'Tanári megjegyzés'-ek között. A 💻 szimbólummal kezdődő bekezdések segítséget adnak arra, hogyan használja számítógépét. Ezek segítségével könnyen kiigazodik majd a több száz különböző képernyőfelület között.

Minden egyes fejezet végén megtalálja az adott fejezetre jellemző összefoglalást (billentyűkombinációk, parancsok). Külön Referencia kézikönyv tartalmazza az általános parancsok, billentyű kombinációk, függvények, valamint a használható adatállományok helyét.

A **DERIVE** 6 futatásához egy PC kompatibilis számítógépre van szükség WINDOWS 98, WINDOWS ME, WINDOWS 2000 vagy WINDOWS XP operációs rendszerrel.

A könyv feltételezi a Windows operációs rendszerek felhasználói szintű ismeretét. A könyvben található képek XP-s környezetben futtatott **DERIVE** 6-ról készültek. Ha más Windows-t használ, akkor képernyőjén nem pontosan ugyanaz jelenik meg, mint ami a könyvben látható.

A könyv bemutatja a **DERIVE 6**-ra jellemző összes olyan funkciót és sajátosságot, amely a program gyakori használatához szükséges. Több működési mód is bemutatásra kerülhetett volna, de a szerzők célja nem egy **DERIVE** felhasználói kézikönyv megírása volt. A teljes referencia kézikönyvet az összes funkcióval, az online súgója szolgáltatja.

Ez a leírás a DERIVE 6 verzióhoz készült. Ha későbbi (frissített) DERIVE 6 verziót használ, néhány képernyőkép különbözhet a könyvben levőktől.

Megjegyzések DERIVE 5 felhasználóknak:

Ha jártas a **DERIVE 5**-ben és olvasta a "Bevezetés a **DERIVE** 5-be" könyvünket, mind a programot, mind a könyvet az előző kiegészítéseként fogja észlelni. A program főbb újdonságai, és ezek könyvben való elhelyezkedése:

- Lépésenkénti megjelenítés (13.f)
- TI-89, TI-92+ és Voyage200 kézi-számítógépekkel való összekapcsol-hatóság (16.f)
- Menük, eszköztárak és gyorsbillentyűk testreszabása (17.f)
- Vonalzó az ábrázolás animálásához (6.f)
- Automatikus ábracímkézés (6.f)
- Tökéletesített, kiterjesztett online help (9.f)
- Többsoros kifejezések bevitele (9.f)
- **DERIVE** Unicode betűtípus (1.f)
- Zárójelezés vizsgálat (4.f)
- Új beállítási lehetőségek a pontok összekötésére (9.f)
- Új beállítási lehetőségek a pontok összekötésére 3D-ábrázolási ablakban (9.f)
- 3D-ábrák hálójának vezérlése (7.f)
- 3D-ábra egérrel való mozgatása (7.f)

A 13, 16. és 17. fejezetek teljesen újak. A többi fejezet az előző könyv frissítése, kiegészítése.

Jó szórakozást az olvasáshoz, és a program felfedezéséhez.

1. fejezet

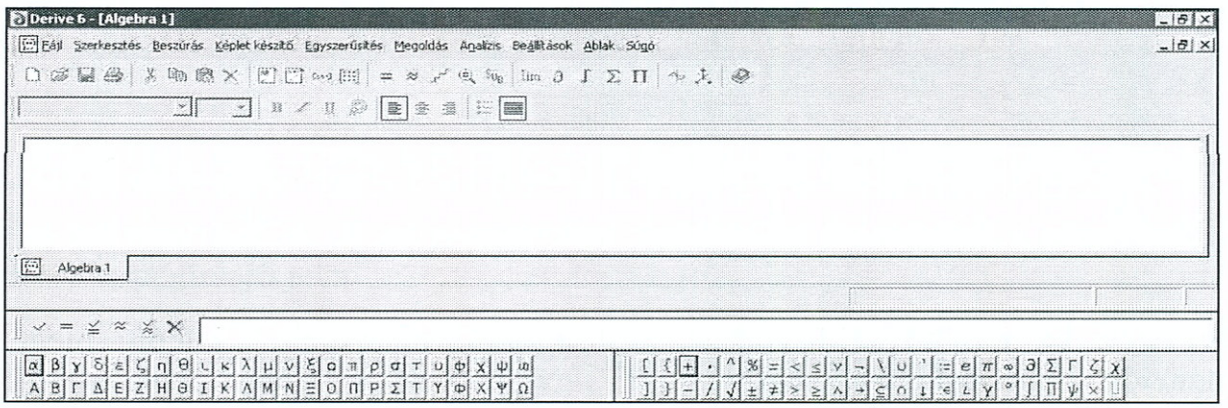
Az első lépések

A **DERIVE** megkönnyíti a matematikai műveletek elvégzését: gépeljünk be egy feladatot, alkalmazzunk valamilyen parancsot és egy új kifejezést kapunk. Minden kifejezést felhasználhatunk további számításokban, hasonlóan a papíron végzett feladatmegoldásokhoz. Ebben a fejezetben megtanulhatjuk a **DERIVE 6**. használatának alapvető technikáit. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a **DERIVE** elnevezést használjuk.

Ez az ismertető feltételezi, hogy gyári alapbeállítással használjuk a **DERIVE**-ot. A monitoron csak ebben az esetben fognak megegyezni az ábrák a könyvben lévőkkel. Ha a **DERIVE**-ot frissen telepítette, az a gyári alapbeállítást mutatja. Ha viszont valaki más használta korábban, javasoljuk, hogy állítsa vissza a gyári beállításokat. A beállításhoz a B függelékben található útmutató.

Indítsuk el a programot kétszer a **DERIVE** ikonjára kattintva. Ha az asztalon nem lenne **DERIVE** ikon, valószínű, hogy indítani tudja a **Start** menüből, vagy a **Start > Programok** pontról.

A monitoron néhány másodperc múlva a következő ablak jelenik meg:



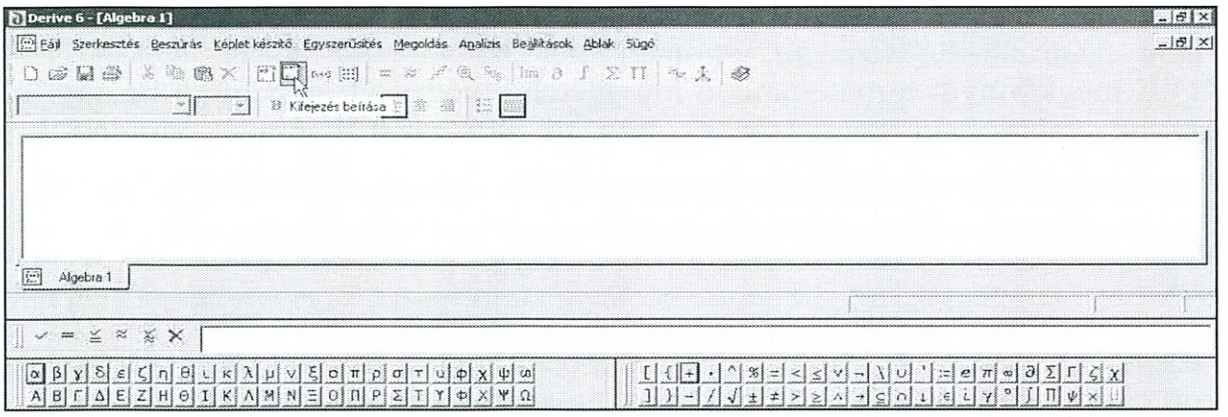
A **DERIVE** képernyője a következőket tartalmazza (fentről lefelé):

- címsor
- menüsor
- parancs eszköztár
- egy (jelenleg üres) algebra ablak
- állapotsor
- beviteli eszközsor, más néven beviteli sor
- görög abc eszköztár és matematikai jelek eszköztára

A **DERIVE**-val oly módon dolgozhatunk, hogy beírunk egy kifejezést, alkalmazunk egy parancsot és így készítünk egy munkalapot. A **DERIVE** elindítása után a rendszer kész

arra, hogy kifejezéseket vigyünk be a beviteli eszközsorból, melyet a villogó kurzor mutat. A beviteli módot a parancssorban balról a tizedik gombbal aktivizálhatjuk:

Ismerjük meg a gombot, vigyük fölé az egérkurzort.

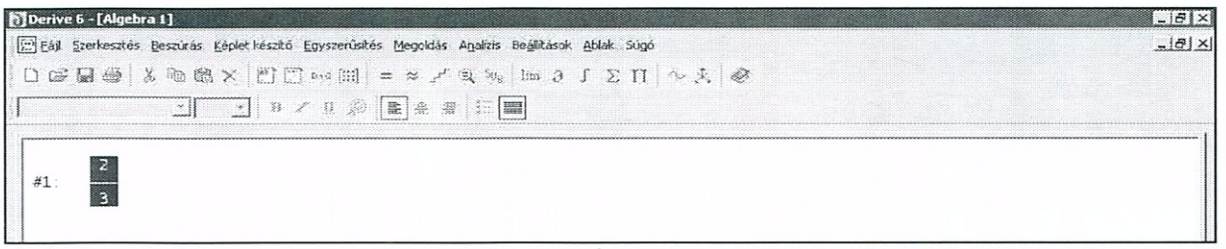


Az alatta megjelenő **Kifejezés beírása** a gomb neve. Az állapotsorban az *Új kifejezés beírása az aktív munkalapra*, azaz a gomb funkciója olvasható.

Vigyünk be egy új kifejezést: mozgassuk az egér-kurzort a gomb fölé, majd kattintsunk rá a bal egér-gombbal (nyomjuk le, majd engedjük föl).

Írjuk be a következő törtet: *2/3*

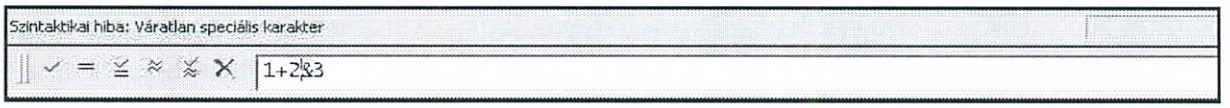
Zárjuk le a bevitelt az ENTER billentyűvel



A **DERIVE** a kifejezést valódi törtként – számláló és nevező – jeleníti meg, vagyis „kétdimenziós" kimenetként, szemben az egydimenziós", azaz „lineáris" bemeneti formával. A kifejezés sajátságos sorszámcímkéje a kifejezés előtt balra látható: #1. Ekkor a **DERIVE** kész a következő kifejezés bevitelére, a kurzor még mindig a beviteli sorban villog. Azt is megfigyelhetjük, hogy a bevitt kifejezés még a beviteli sorban van és az egész ki van jelölve. Itt ez ugyanazt jelenti, mint a szövegszerkesztőknél. Megszüntethetjük a kijelölést a jobb egérgombra kattintva, és szerkeszthetjük a jelsort, vagy begépelhetünk a kijelöltek helyére új jeleket.

Írjuk be az előző helyére a következő kifejezést: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, szándékosan gépelési hibával.

Gépeljük be: *1/2+1&3*



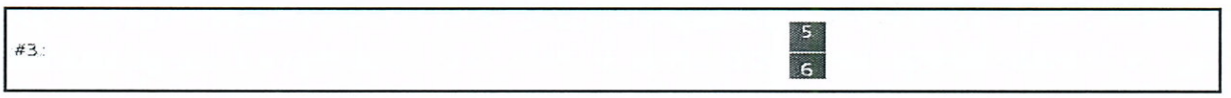
Ha a **DERIVE** szintaktikai hibát észlel, a kurzort a hiba helyére mozgatja és a hiba oka megjelenik az állapotsor első paneljében. A fenti esetben a **DERIVE** egy nem várt speciális karaktert észlelt. Bizonyos esetekben (pl., ha nyitó zárójelet gépelünk a törtjel helyett) több hibalehetőség is fennáll és ilyenkor a **DERIVE** csak tippelhet.

💻 Frissítsük a bevitelt: 1/2 + 1/3. Használjuk a *DEL* gombot (vagy a jobbra nyíl gombot , majd a *visszatöröl* (backspace) gombot ← a helytelen karakter törlésére és írjuk be a „per" jelet. Zárjuk le: ↵

Megjelenik a kifejezés és a sorcímkéje: #2. Az új kifejezés kijelölve látható, viszont #1 már nincs kijelölve.

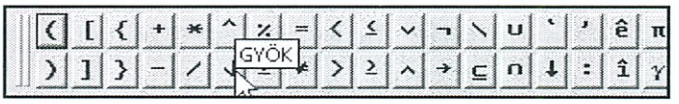
Ha gépelési hibát ejtettünk a bevitel során, és a kijelölt kifejezést el akarjuk távolítani, az ESC gombbal aktivizáljuk az algebra ablakot. Használjuk a DEL gombot a kijelölt rész törlésére. Ezután a **Kifejezés beírása** gombbal aktivizáljuk a beviteli eszközsort. A második fejezetben a kifejezés helyettesítésének más módját is megismerjük.

💻 Egyszerűsítsük a #2 kifejezést a parancs eszközsor **Egyszerűsítés** gombját használva:

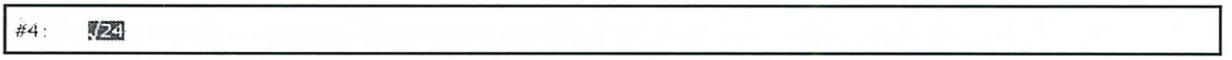


Az eredmény lesz a következő kifejezés, mely a #3 sorcímkét kapja. Az alapbeállítás szerint az egyszerűsített kifejezés középre igazítva látható. Ily módon könnyen megkülönböztethetjük a bevitt kifejezést az eredménytől. Mint sok más jellemzőt, a **DERIVE**-ban ezt is igényeinknek megfelelően állíthatjuk be.

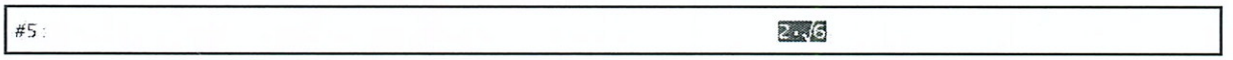
Az **Egyszerűsítés** parancs használata után még mindig a beviteli címsor az aktív. Írjuk be a következő kifejezést: $\sqrt{24}$. A négyzetgyökjel beviteléhez használjuk a matematikai jelek táblázatából a megfelelő jelet.



💻 Írjuk be a $\sqrt{24}$ -et ilyenképpen: *√24*



💻 Egyszerűsítsük az [=] gombra kattintva.



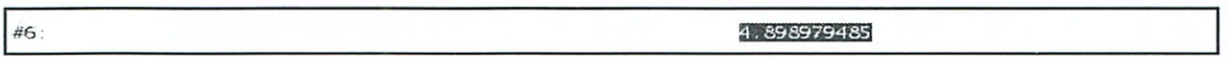
Ez eltér attól, amit egy 'hagyományos' számológép produkált volna. Az egyik matematikus azt kérdezte egyszer: *„Honnan ismerni föl egy matematikust?"*, és a következő választ ajánlotta: *„Egy matematikus a #5 sorbéli eredményt szépnek tartja."* A legtöbb tanuló a

lebegőpontos közelítéssel küszködik ilyen kifejezések esetében. A **DERIVE** azt is meg tudja oldani. Jelöljük ki a #4-t, hogy másik parancsot alkalmazhassunk.

Jelöljük ki #4-t az egeret abba a sorba mozgatva, ahol a kifejezés található, majd kattintsunk a bal egérgombbal.

Az egér-gombbal történő kijelölés csak egyik módja a kijelölésnek. Választhatjuk azt is, hogy először, ha szükséges, aktivizáljuk az algebra ablakot az ESC gombbal, majd a ↑ és ↓ kurzornyilakkal mozgatjuk le-föl a kijelölést.

Keressük meg a közelítő értéket a **Kiértékelés** gombra kattintva: ≈



Ha egy kifejezés ki van jelölve, az állapotsor második paneljében automatikusan megjelennek a kifejezés jellemzői. A harmadik panel a kiszámításhoz felhasznált időt jelzi, amennyiben a kifejezést számítások eredményeként kaptuk. A #6 kifejezésnél ez a következő:

Az automatikusan generált jellemzők magyarázzák, hogy jött létre a kifejezés. A *Kiértékel(#4)* azt jelenti, hogy a kifejezést a #4 kifejezésen elvégzett **Kiértékelés** parancs eredményeként, vagy a ≈ gombra kattintva kaptuk. A kijelzett számítási idő – 0.000s – azt jelzi, hogy a kiszámításhoz kevesebb, mint 0.001s volt szükséges (ez gépenként eltérő lehet).

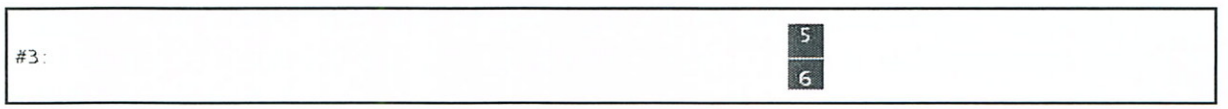
Jelöljük ki #4-t, ...

... majd a #5 kifejezést.

A #4-hoz fűzött megjegyzés – *Felhasználó* – arra utal, hogy azt a felhasználó írta be, míg a #5 jegyzete – *Egyszerűsít(#4)* - mutatja, hogy az eredményt a #4 kifejezésből kaptuk a **Kiértékelés** parancs vagy parancsgomb segítségével. Az első panel mindig egy menüpontot, gombot vagy parancs-állapotot jelöl.

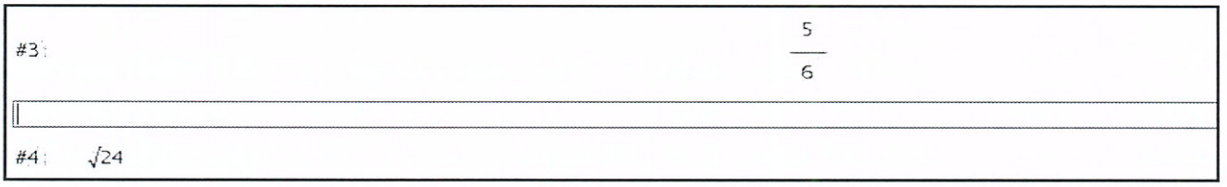
A **DERIVE** munkalapok szöveget vagy más objektumokat is tartalmazhatnak. Szöveget legkönnyebben a parancs eszközsor **Szöveg beszúrása** parancsgombjával AB lehet beilleszteni. Ha új algebrai kifejezést írunk be, az mindig a munkalap végére kerül. Más objektumok (köztük a szöveges objektumok is) a kijelölt objektum után kerülnek behelyezésre. Ha szöveget akarunk a négyzetgyök 24 elé beilleszteni, először jelöljük ki az előtte álló objektumot.

Jelöljük ki a #3 kifejezést.



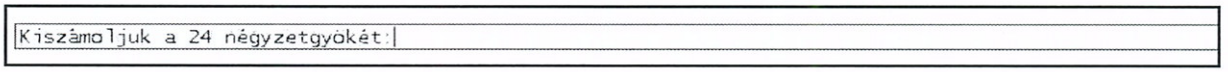
Nézzük meg, mi a funkciója az **Szöveg beszúrása** parancsgombnak ( ) úgy, hogy rámutatunk az egér-kurzorral.

Illesszünk be szöveget az **Szöveg beszúrása** gombra kattintva.



A szöveges objektum kijelölését a köré írt keret jelzi. A keretben villogó kurzor mutatja, hogy szövegszerkesztő módban vagyunk.

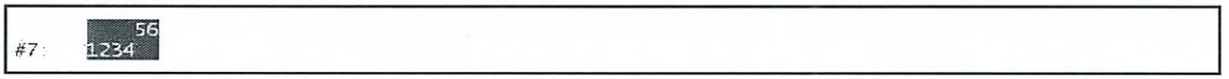
Írjuk be a következő szöveget: *Kiszámoljuk a 24 négyzetgyökét.*



A szöveges objektumban ugyanazt az egyszerű szerkesztőt használhatjuk, mint a szokásos szövegszerkesztőkben. Később megtanuljuk, hogy lehet a betűméretet, színt és az igazítást beállítani.

Következő példaként számítsuk ki az 1234^{56}-t. Az előző lépések miatt jelenleg az algebra ablak az aktív. Ahhoz, hogy új kifejezést tudjunk beírni, a beviteli címsort kell aktívvá tennünk.

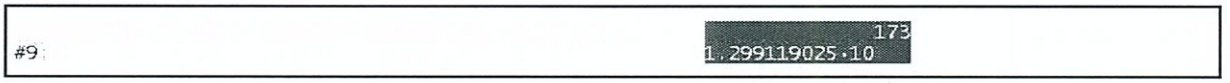
Használjuk először az **Kifejezés beírása** parancsgombot , majd írjuk be: *1234^56*↵ Az ^ hatványozás operátor megtalálható mind a billentyűzeten, mind pedig a matematikai jelek táblázatában (a hatodik jel balról az első sorban).



Egyszerűsítsük, a parancsgombot használva.

Egy nagyon nagy számot kaptunk. Ha valaki meg akarja tudni, hány számjegyből áll, kétféle lehetőség van. Az egyik, hogy megszámoljuk. A másik, hogy közelítő értéket számítunk.

Számítsunk közelítő értéket, kattintsunk a parancsgombra.



Tudományos kifejezésben jeleníti meg a számot. Mivel a számjegyek száma eggyel több, mint a 10 kitevője, a szám 173+1= 174 számból áll.

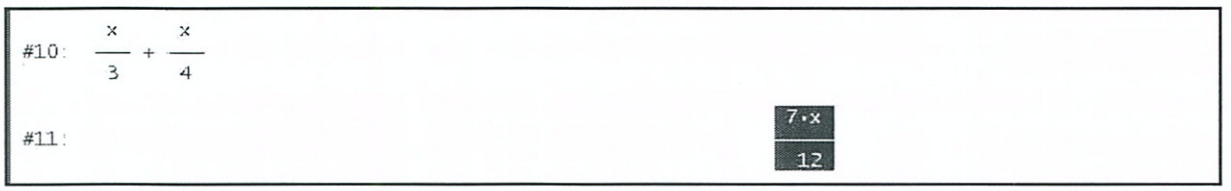
A következő gyakorlatban azt tanuljuk meg, hogyan lehet kifejezéseket beírni a beviteli címsor előtt lévő parancs-gombokkal.

Gépeljük be az *x/3+x/4* kifejezést úgy, hogy most nem használjuk az ENTER billentyűt.

Figyeljük meg a beviteli mezőtől balra látható öt gombot. Ha a szokásos módon a ✓ gomb fölé visszük az egér-kurzort, láthatjuk, hogy ez a **Kifejezés beírása** gomb.

Ha ezt a gombot választjuk, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az ENTER gombbal. Próbáljuk ki.

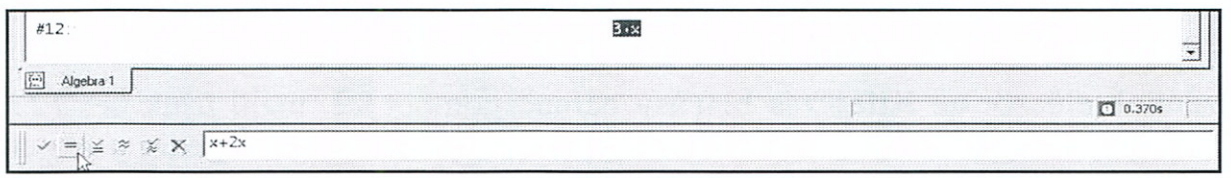
Írjuk be a fenti kifejezést és kattintsunk a ✓ gombra, majd egyszerűsítsük a parancssor = gombjára kattintva.



A hagyományos számológépekkel szemben a **DERIVE** nem numerikus (szimbólum(ok), algebrai jelek) számításokat is képes végrehajtani, mint ahogyan a #10-t egyszerűsítette #11-é.

A következő példában használjuk a beviteli címsor = gombját (második).

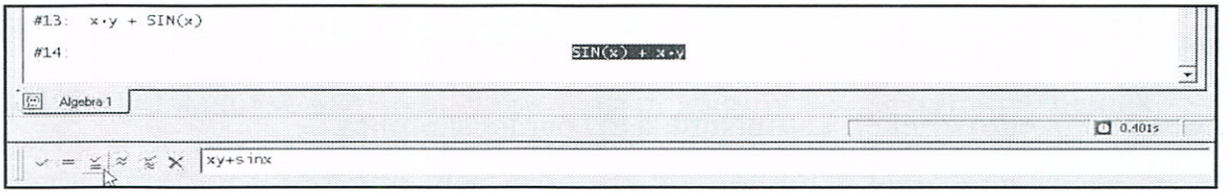
Gépeljük be az $x+2x$ kifejezést és azonnali egyszerűsítésére használjuk a beviteli sor **Egyszerűsít** gombját =.



Ezzel a parancs-gombbal úgy egyszerűsítettük a kifejezést, hogy az egyszerűsítetlen változatot nem jelenítette meg. Figyeljük meg az eredményre vonatkozó megjegyzést: *Egyszerűsít (Felhasználó).*

A következő feladathoz használjuk a beviteli eszközsor harmadik gombját: ☑

Vigyük be és egyszerűsítsük az xy+sinx kifejezést a beviteli sor **Beírás és egyszerűsítés** gombbal: *xy+sinx* ☑



Ennek a gombnak eredményeként két kifejezést kaptunk, a #13 és #14-et, és ugyanazt eredményezte, mintha egyszerűsítés nélkül az ENTER, vagy a ✓ gombbal zártuk volna a kifejezést, majd egyszerűsítettük volna a = gombbal. Így ez kényelmes gyorsbillentyűként használható a **Bevitel és egyszerűsítés** helyett. Azt is láthatjuk ebből, hogy milyen kényelmes a gyors bevitel a **DERIVE**-ban. Ugyanúgy írhatjuk be a kifejezéseket, mintha azokat papírra írnánk. $x{\cdot}y$ helyett elég csupán xy-t írni. A szorzásjel nem szükséges az x és az y közé. Az x szinuszához elég beírni a $sinx$-et. Nem szükséges az x-hez a zárójel. A

beviteli címsorban *beírás, egyszerűsítés, beírás & egyszerűsítés, kiértékelés* és *beírás & kiértékelés* gombokat találunk.

A #14-es egyszerűsített kifejezés csak annyiban tér el a#13-tól, hogy tagjai más sorrendben láthatók. Az egyszerűsítetlen kifejezések olyan sorrendben kerülnek megjelenítésre, ahogyan bevittük őket (kivéve a kétdimenziós nyomtatási formák), míg az egyszerűsített kifejezések a tagok egy standard sorrendjét használják.

Térjünk vissza arra, hogy milyen egyszerű a kifejezések bevitele. Az $x \cdot y+sin(x)$ gyors beviteli lehetőségnek – xy+sinx-ként - a következménye, hogy a változók neve csak egy karakterből állhat (pl. x és y). Ez elegendő is a legtöbb esetben, de ha mégis több karakterből álló változót kell használnunk,(pl. *time* vagy $x12$), a **DERIVE** ezt is megengedi. Több karakterből álló változók használatával a 14. fejezetben foglalkozunk.

Természetesen nem hagyhatunk el minden zárójelet. Például zárójelbe kell tennünk az olyan kifejezések nevezőjét, mint a $\frac{2}{x+1}$. Ha ebben a kifejezésben elhagynánk a zárójelet, más eredményt kapnánk.

Írjuk be: *2/x+1*

#15: $\frac{2}{x} + 1$

Hoppá! Ez másképp néz ki, mint amit vártunk. A **DERIVE** a műveleteket a hagyományos sorrendben végzi, tehát előbb a szorzást és osztást, és ezután az összeadást és kivonást. A fenti példából is láthatjuk, hogy a bevitelünk kétdimenziós kijelzése értékes visszajelzést ad a bevitelünk helyességéről[1].

A legutóbbi bevitel javításánál előnyt jelent, hogy az még mindig megtalálható a beviteli sorban.

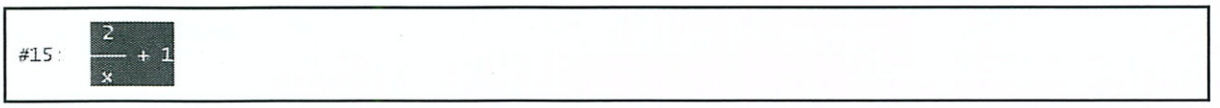
A kifejezés szerkesztéséhez használjuk a jobbra nyíl gombot →, hogy megszüntessük a kijelölést. Írjuk át a kifejezést *2/(x+y)* formában és vigyük be:

#16: $\frac{2}{x + 1}$

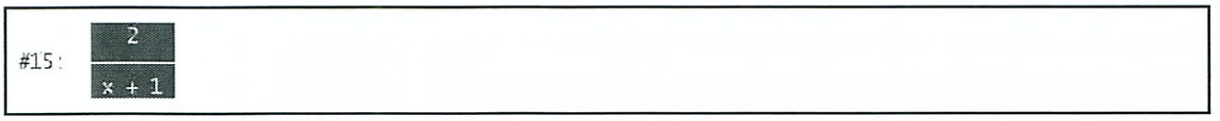
Ezúttal jónak látszik a kijelzés. Mivel a #15-ös kifejezésre nincs szükségünk, töröljük.

Készüljünk fel a törlésre: Jelöljük ki a #15-t az egérrel a sorába kattintva, vagy az algebra ablakot először az ESC billentyűvel aktívvá téve és a billentyűzet gombjaival lépkedve.

[1] Tanári megjegyzés: Nagyon egyszerű gyakorlatot adhatunk a tanulóknak. A táblára írt, vagy papíron kapott kifejezéseket kell beírniuk. Mivel a **DERIVE** kétdimenziós formában megjeleníti a bevitelt, a tanuló azonnali visszajelzést kap. Ha a megjelenítés eltér a táblán, vagy a papíron lévőtől, helytelen volt a bevitel, újra kell próbálkozni. Miközben a tanár egyre komplexebb kifejezéseket írat be a tanulókkal, azok megtanulják a próbálkozások és tapasztalások során (próbálkozások és hibák), hogyan kell a kifejezéseket 'linearizálni', és felismerik a kifejezések struktúráját. Ezzel biztosabban fogják fel a kifejezések felépítését, ami sok területen az egyik alapvető matematikai képesség



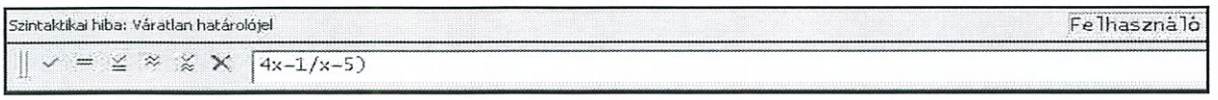
Töröljük a #15 sort. Használjuk az **Objektum törlése** gombot ☒ vagy a DEL billentyűt.



A kifejezés, amely a #15-ös sorban volt, eltűnt. A #16-os lett most a #15-ös. Alapbeállításban a sorok újraszámozása történik úgy, hogy #1-el kezdődik a számozás és nincs ugrás köztük.

Az olyan hibák, mint a zárójelek elhagyása a kifejezés értelmezésének megváltozásához vezethet, ahogy az előző példában is láttuk. Ha viszont csak az egyiket hagyjuk el, a bevitel értelmetlen karaktersorrá válik és a **DERIVE** megfelelő hibaüzenet küldésével figyelmeztet.

Írjuk be a következőt, miután a beviteli sort aktivizáltuk a gombbal: *4x-1/x-5)*.

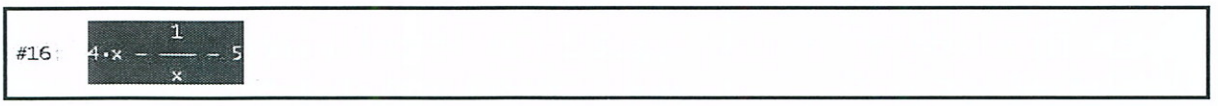


A **DERIVE** igyekszik a kurzort a vélhető hiba elé tenni. Mivel egy fölösleges záró zárójel fedezhető fel, míg nyitó zárójel nem, az első változat jelenik meg a hibaüzenetben. Attól függően, hogy hogyan kellene a kifejezésnek kinéznie, vagy törölnünk kell a fölösleges zárójelet, vagy a hiányzót kell beillesztenünk valahová eléje. A fenti példánkban hat lehetséges javítást tehetünk:

bevitel	*4x-1/x-5*	*4x-1/x-(5)*	*4x-1/(x-5)*	*4x-(1/x-5)*	*4(x-1/x-5)*	*(4x-1/x-5)*
kiírás	$4x-\frac{1}{x}-5$	$4x-\frac{1}{x}-5$	$4x-\frac{1}{x-5}$	$4x-\left(\frac{1}{x}-5\right)$	$4\left(x-\frac{1}{x}-5\right)$	$4x-\frac{1}{x}-5$

Ha a harmadik változatot kívánjuk beírni, nyitó zárójelet kell tennünk az osztásjel és az x változó közé.

Szerkesszük át a sort *4x-1/(x-5)* formában és nyomjuk meg az ENTER billentyűt.[2]



Miközben a **DERIVE**-val dolgozunk, vagy a beviteli sor, vagy az algebra ablak az aktív. Ha a beviteli sor aktív, az ESC billentyűvel léphetünk át az algebra ablakba. Ha az algebra ablak aktív, a beviteli címsort az **Kifejezés beírása**, illetve a neki megfelelő gyorsbillentyű, az **F2** aktivizálja. Használhatjuk erre az egeret is. Mindig az a sor aktív, ahová utoljára mozgatjuk az egérkurzort és a bal gombbal kattintunk.

---

[2] Tanári megjegyzés: Ez is egy lehetőség arra, hogy a **DERIVE**-ot alapfokú oktatásra használjuk. Kérdezzük meg, hogy hány különböző kifejezést tudnak generálni egy érvényes karaktersorba 1, 2 vagy több zárójelpárt elhelyezve. Kiváló gyakorlat ahhoz, hogy a tanulók megértsék a kifejezések struktúráját.

Vigyük az egérkurzort a beviteli sorba és kattintsunk rá a bal egérgombbal.

Ennek a módszernek az a hátránya, hogy megszünteti a kijelölést, ha volt ilyen, tehát nem. Vihetünk be új kifejezést a régi helyére egyszerűen begépelve azt. Használhatnánk a BACKSPACE (visszatörlés) billentyűt a beírt sor kitörlésére, de van egy sokkal elegánsabb módszer: a TAB billentyű.

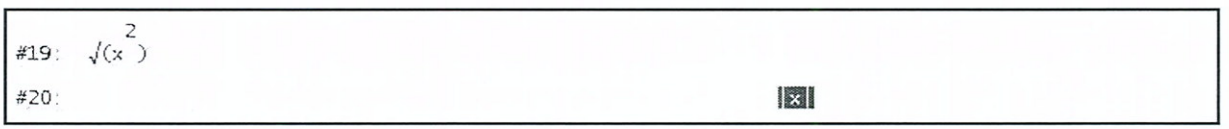
Jelöljük ki a beviteli sor tartalmát a TAB billentyű ⇆ használatával.

A következő feladat a $\sqrt{x^2}$ kifejezés bevitele és egyszerűsítése. Választhatunk, hogy az ENTER billentyűt és hozzá az **Egyszerűsítés** parancsot használjuk, vagy a beviteli sor **Beírás és egyszerűsítés** gombját. A négyzetgyökjelet beírhatjuk a Matematikai Jelek Eszközsorából, vagy a CTRL + Q billentyűkombinációval.

Gépeljük be a √x^2 kifejezést, majd használjuk a bevitelre a CTRL + ENTER billentyűket. Ez ugyanaz, mint a gomb, tehát így tudjuk a **Beírás és egyszerűsítés** parancsot végrehajtani az egér használata nélkül.

Másik változatként az *x*^2 kifejezést foglaljuk zárójelbe.

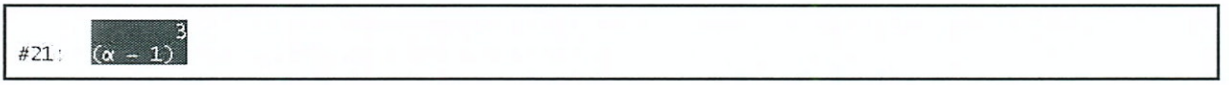
Vigyük be és egyszerűsítsük a √(*x*^2) kifejezést.



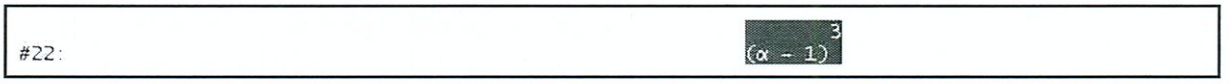
A két utóbbi példa két szempontból is figyelemreméltó. Egyrészt, mert láthatjuk, hogy milyen fontos a zárójelek elhelyezése ahhoz, hogy megkülönböztessük a $\sqrt{x}^2$ kifejezést $\left(\sqrt{x}\right)^2$ jelentéssel a $\sqrt{x^2}$ –től $\sqrt{\left(x^2\right)}$ jelentéssel. Másrészt a #20 sor mutatja, hogy a **DERIVE** milyen körültekintően egyszerűsít kifejezéseket.

Az $(\alpha\text{-}1)^3$ kifejezést a következőképpen vihetjük be:

Írjuk be: *(α-1)^3* . (Az alfa bevitelére használjuk a görög abc eszköztárat.)

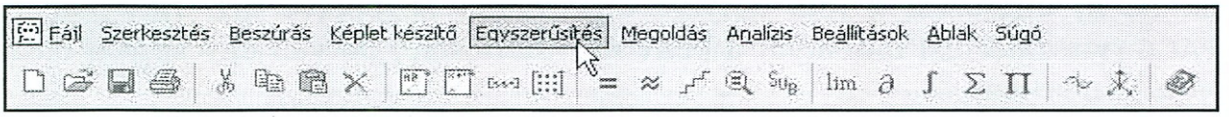


Próbáljuk meg kiterjeszteni a kifejezést először egyszerűsítve az gombbal.



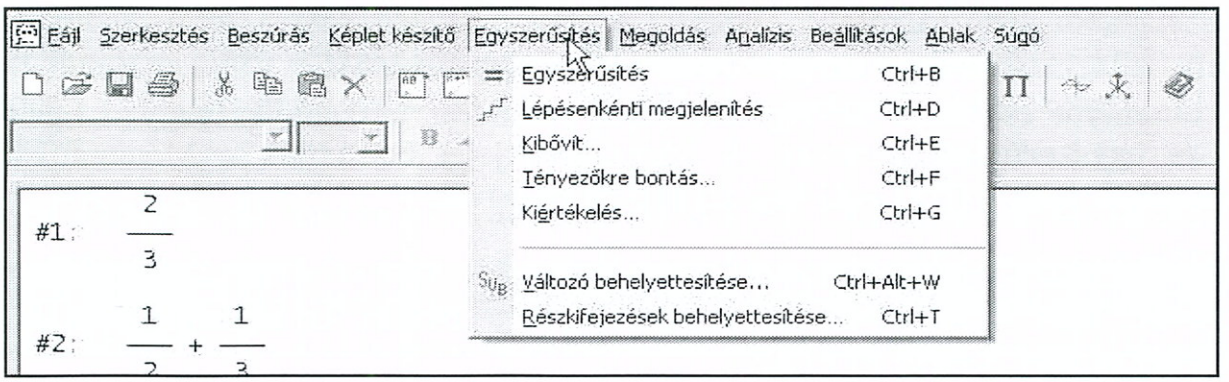
Ez nem hozott semmi változást. Most megpróbálhatunk használni egy olyan parancsot, amelynek nincs a parancssorban megfelelő gombja.

Nyissuk meg az **Egyszerűsítés** menüt úgy, hogy az egér-kurzort a menüsor **Egyszerűsítés** utasításra mozgatjuk.

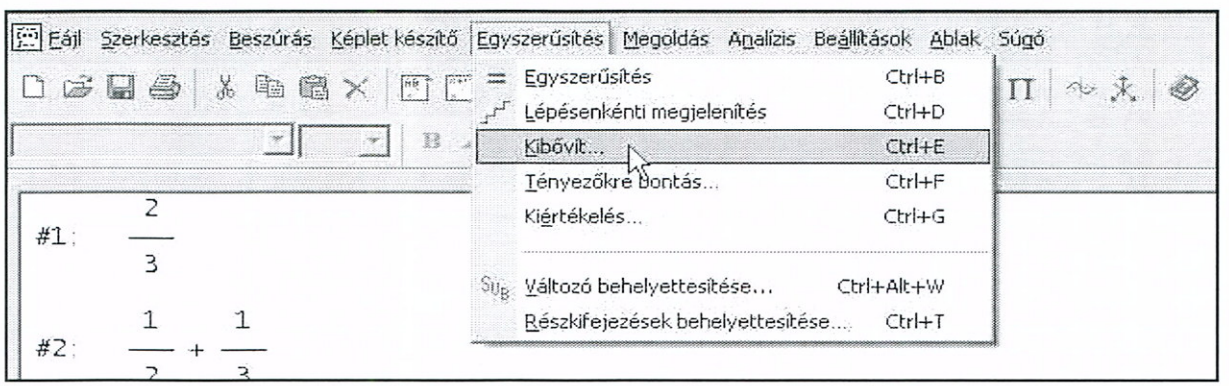


Nyissuk meg az **Egyszerűsítés** menüt a baloldali egér-gombra kattintva.

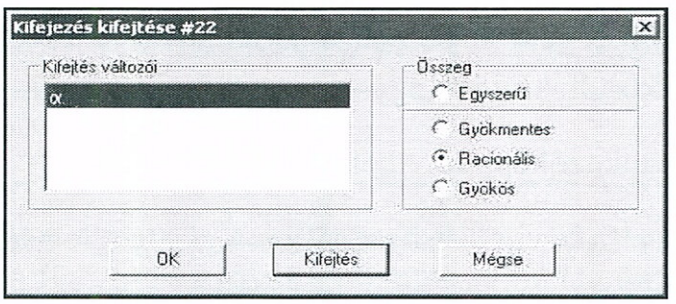
Ez a menü számos utasítást kínál. A **Kibővít** utasítás alkalmas a kifejezés kiterjesztésére.



Válaszuk ki az **Kibővít** utasítást, ráhúzva az egérkurzort.



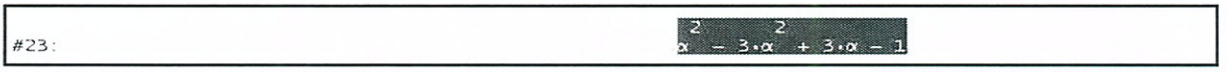
Ezután kattintsunk rá a baloldali egér-gombbal.



A **DERIVE** megnyitja a **Kifejezés kifejtése** dialógus ablakot. Hasonló ablakokat látunk majd minden olyan esetben, amikor az utasítás a paraméterek megadását igénylik. Ebben az ablakban kell meghatároznunk a változót és a kiterjesztés mélységét. Gyakran elegendő elfogadnunk a gyári beállításokat és azonnal kiléphetünk az ENTER billentyűvel, vagy az alapbeállításban kiemelt gombra kattintva, ami jelen esetben a **Kifejtés**. A gyári beállítást a kiemelve megjelenő gomb jelzi. Ha nem akarjuk végrehajtani az utasítást, használjuk a

MÉGSE gombot, vagy az ESC billentyűt. Az OK gombot akkor használjuk, ha a **Kifejtés** utasítást egyszerűsítés nélkül kívánjuk végrehajtani.

💻 Alkalmazzuk a kifejtést a beállított paraméterekkel, használva a **Kifejtés** utasítást (vagy a **Kifejtés** gombra, vagy a ↵billentyűre kattintva).



A billentyűzetről a **WINDOWS** technikáját használva tudjuk, a **Kibővít** parancsot az **Egyszerűsítés** menüből végrehajtani: az ALT + E nyitja az **Egyszerűsítés** menüt (azért használjuk az E betűt, mert ez az aláhúzott betű az **Egyszerűsítés** -ben. Ezután leütjük a K billentyűt (ez az aláhúzott betű), viszont ezúttal az ALT nélkül, mert azt csak menük megnyitására használjuk. Ezt az eljárást alkalmazhatjuk minden menüparancsra.

A parancs eszközsor minden gombjának van megfelelő menüparancsa.

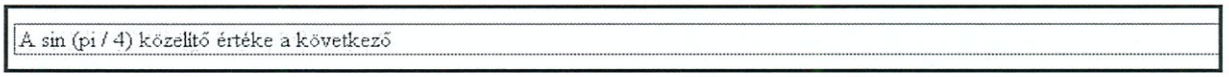
Használjunk menüparancsokat a következő példában. Írjuk be a *sin(π/4)* –et, majd egyszerűsítsük, és végül számítsunk közelítő értéket.

💻 A kifejezés beviteléhez használjuk az **Kifejezés beírása** utasítást, majd gépeljük be a *sin(π/4)* kifejezést zárjuk az ENTER gombbal. (A nagyon gyakran használt π megtalálható a görög abc-ben és a matematikai kifejezések között is.)

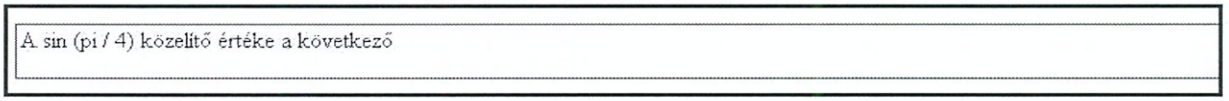
💻 Egyszerűsítsük a #24 számú kifejezést az **Egyszerűsítés > Egyszerűsítés** utasítással.

Itt is egy 'szép' eredményt kapunk. Mielőtt a közelítő értéket számítanánk, szúrjunk be egy szöveges megjegyzést a közelítés kiszámításáról.

💻 Vigyünk be szöveges objektumot a **Beszúrás > Szöveg objektum** utasítással: *A sin (pi / 4) közelítő értéke a következő:*

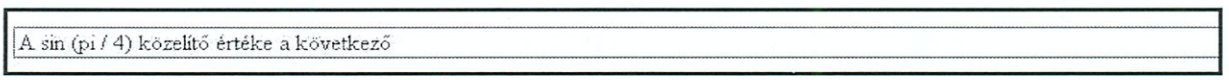


💻 Próbáljuk meg bevinni a beírtakat az ENTER billentyűvel.



Az ↵billentyű, mivel szövegszerkesztő módban használtuk, új sort adott az előzőhöz. Nem ez volt a cél.

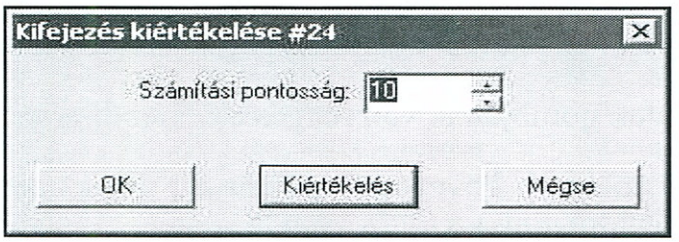
💻 Töröljük az új sort a BACKSPACE (visszatörlés) billentyűvel ←



Jegyezzük meg, hogy amíg a **DERIVE** szövegszerkesztő módban van, bizonyos gombokat és utasításokat nem használhatunk, mint ahogyan láthatjuk is a parancssorban. Az elérhetetlen gombok, utasítások halványítva jelennek meg. Pl. az **Kiértékelés** utasítás nem érhető el, mert szöveges objektum van kijelölve.

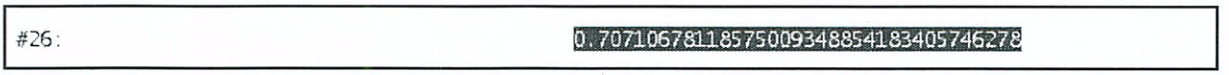
Ahhoz, hogy közelítő értéket számítsunk, előbb ki kell jelölnünk a kifejezést.

Jelöljük ki a #24 sorban a kifejezést és az **Egyszerűsítés > Kiértékelés** paranccsal számítsuk ki a közelítő értéket.



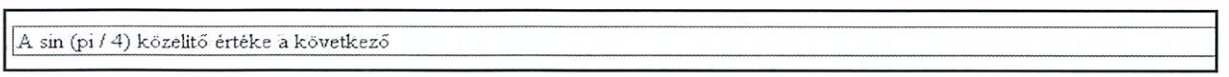
A Parancs Eszközsor **Kiértékelés** gombjával szemben az **Egyszerűsítés > Kiértékelés** utasításra lenyílik egy párbeszédablak, mely kéri, hogy adjuk meg, hány számjegy pontossággal kívánjuk a számítást. A **Kiértékelés** gombot használva a gép ugyanígy az alapbeállítás szerinti 10 számjegyig számol. A **Egyszerűsítés > Kiértékelés** parancs lehetővé teszi, hogy ideiglenesen, a következő műveletre megváltoztassuk a beállítást. Állítsuk a számot 35-re és lépjünk ki az **Kiértékelés** gombbal.

35 **Kiértékelés**

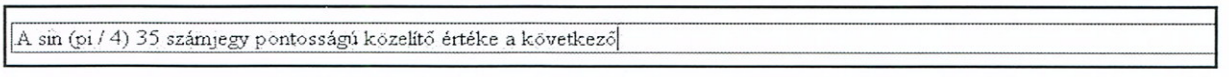


A **DERIVE**–ban elméletileg bármilyen pontosságot megadhatunk, amelyre a számításainkhoz szükség van. Gyakorlatilag a gép memóriája és a türelmünk szab határt. Mint később látjuk majd, a pontosság növelésével a műveleti idő növekszik.

Kattintsunk a szövegre, aktivizáljuk ezzel a szerkesztés módot. Vigyük a kurzort közvetlenül a) zárójel után.



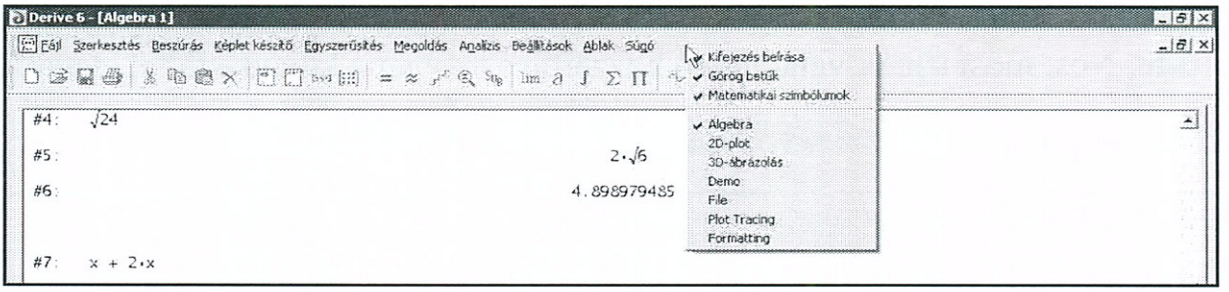
Változtassuk meg a szöveget, írjuk a zárójel után: *35 számjegy pontosságú*



Ha csökkenteni akarjuk a betűméretet, a **Formázás** eszköztárnak bekapcsolt helyzetben kell lenni.

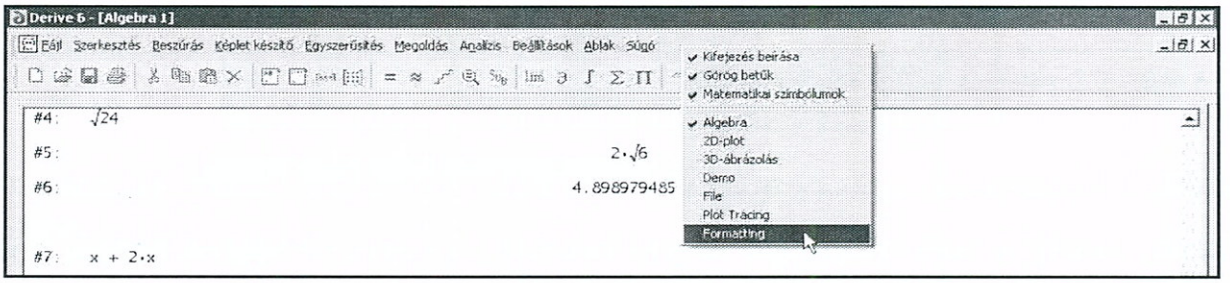
Mozgassa az egérmutatót valahova a menüsor vagy az eszköztár területére.

Nyissa meg a menüt az egér jobb gombjára kattintva.

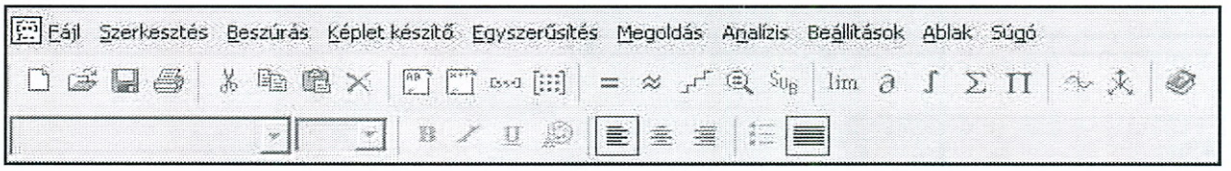


Ez a menü magába foglalja az összes elérhető eszköztár kapcsolóját. A kipipált eszköztárak be vannak kapcsolva. Az átkapcsoláshoz mozgassa az egeret a felirat fölé, és kattintson egyet az egér bal gombjával.

💻 Válassza a Formázás eszköztárat a **Formázás** kapcsolóra kattintva.



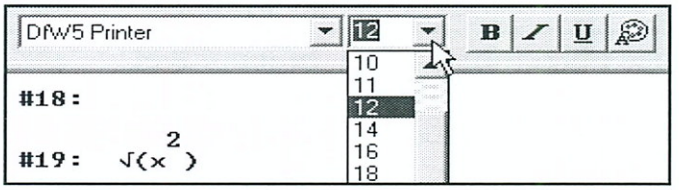
A formázás eszköztár az eszközsor alatt jelenik meg.



A **DERIVE**-ban a szövegek szerkesztéséhez ugyanazt a módszert használjuk, mint a szokásos szövegszerkesztők esetében. Ez az eszközsor jelzi, hogy 12-es a betűméret. Mielőtt szerkeszthetnénk a szöveget, a megfelelő részt ki kell jelölni.

💻 Jelöljük ki a teljes mondatot vagy úgy, hogy az egér-kurzort a szöveg egyik végétől a másik végéig húzzuk miközben a bal gombot lenyomva tartjuk, vagy a kurzort a szöveg egyik végére helyezve, a SHIFT billentyűt lenyomása mellett a jobbra vagy balra nyílra kattintgatunk. Ugyanezt az eredményt érjük el, ha háromszor rákattintunk a szövegre.

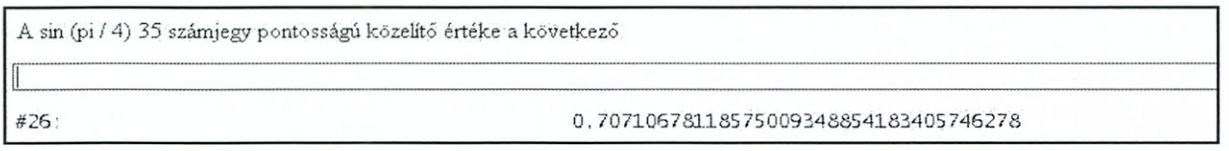
💻 Készüljünk fel a betűméret megváltoztatására: Nyissuk meg a **Betűméret** legördülő ablakot a ▼ jelre kattintva.



💻 Válasszuk a 10-est.

Természetesen ezt úgy is elvégezhetjük, hogy kijelöljük a **Betűméret** mezőt, és a 12-t átírjuk 10-re. Nos, most írjunk valamilyen hozzáillő szöveget a következő feladathoz.

- Készítsük elő a szöveg bevitelét az **Szöveg beírása** gombbal!

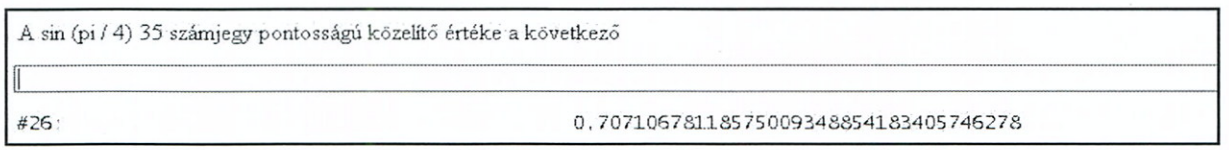


Hoppá, ez most nem jó helyen van. Az új szövegnek a feladatsor végére kellene kerülni. Mivel az **Szöveg beírása** gomb ugyanúgy, mint az **Beszúrás > Szöveg objektum** utasítás a kijelölt sor után helyezi be a szöveges objektumot, először ki kell jelölnünk a #26-os sort.

- Jelöljük ki a #26 sort.

Bár a keret, amely a nem megfelelő helyre beszúrt szöveges objektum helyén volt, nem látható, de mégis ott van. Csak akkor törölhető, ha ki van jelölve.

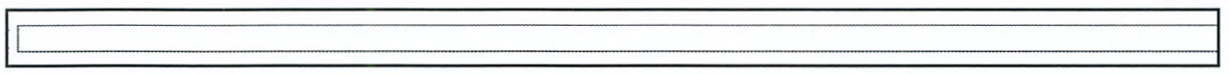
- Jelöljük ki ezt a szöveges objektumot úgy, hogy belekattintunk.



- Próbáljuk meg a törlést a DEL billentyűvel.

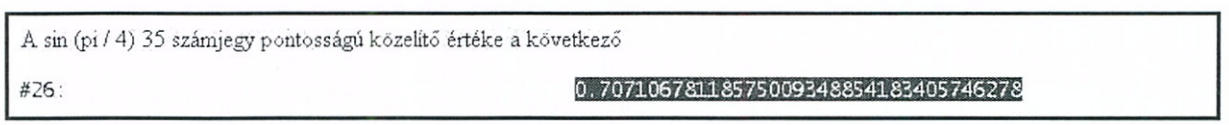
Semmi hatása nincs. Ne felejtsük el, hogy ha egy szöveges objektumba kattintunk, az a szerkesztés módot indítja. Ahhoz, hogy egy szöveges objektumot előkészítsünk a törlésre, másolásra vagy mozgatásra, kattintsunk (pontosan) a keretre, vagy közvetlenül a keret elé vagy mögé. Az ESC billentyűvel is kiléphetünk a szerkesztés módból.

- Jelöljük ki a szöveges objektumot a törlés előkészítésére az ESC billentyűvel.



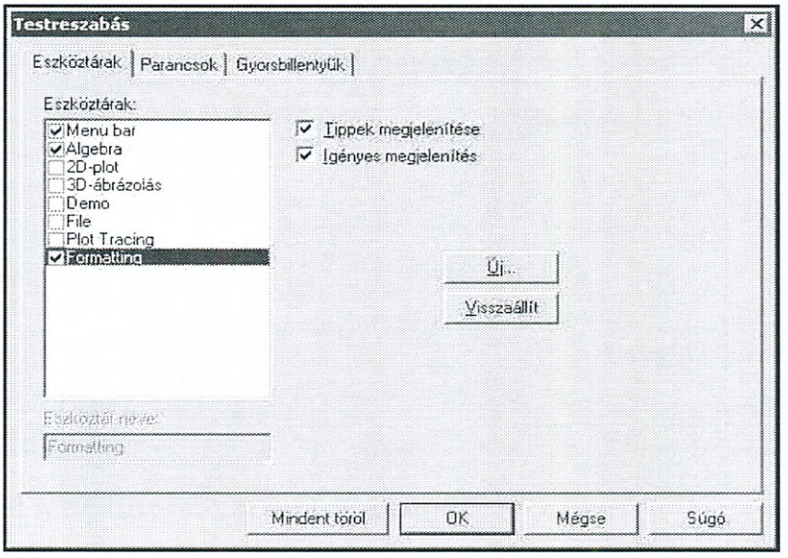
Most a szöveges objektum ki van jelölve, amit a körülötte lévő keret is jelöl. Győződjünk meg róla, hogy a kurzor nincs a keretben. Ha mégis ott lenne, nyomjuk le újra az ESC billentyűt.

- Töröljük az üres szöveges objektumot a DEL billentyűvel.

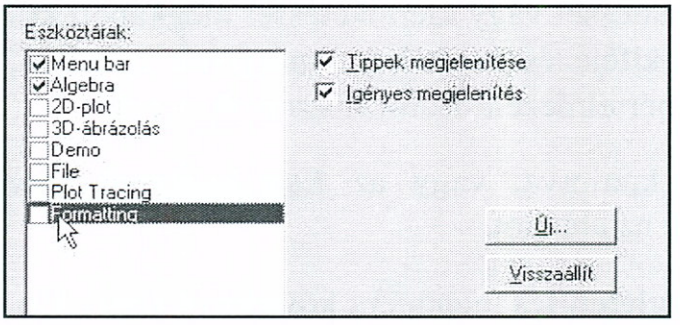


Ha az elkövetkezőkben nem szeretné használni a Formázás eszköztárat, kikapcsolásával helyet szabadít fel más céloknak. Ugyan olyan úton teheti ezt meg, mint ahogy bekapcsolta. De most más lehetőséget ismerhet meg az eszköztárak szabályozásához.

Nyissa meg a **Testreszabás** dialógus ablakot az **Ablak>Testreszabás** menüpont használatával.



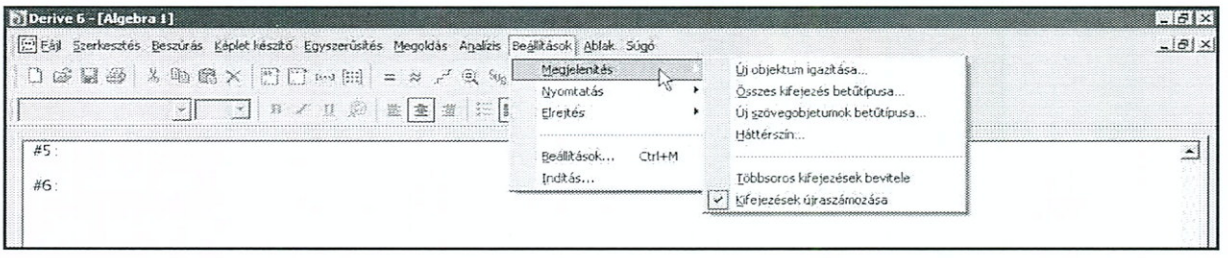
Kattintson az egér bal gombjával a **Formázás** szón, így kikapcsolja a **Formázás eszköztár**at.



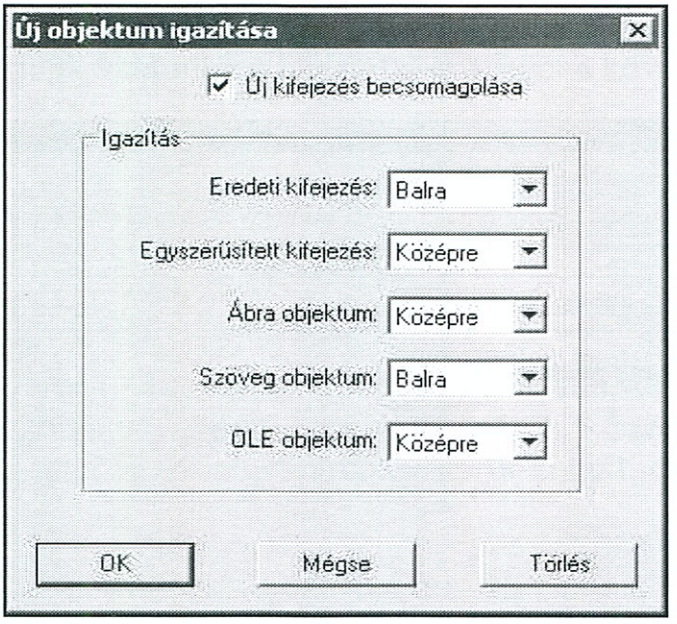
A 17. fejezetben többet olvashat a **DERIVE** beállításairól (illetve az **Ablak > Testreszabás** menüpont lehetőségeiről).

A **Beállítások > Megjelenítés** menüpontot próbálgatva „meghitté" tudja varázsolni a **DERIVE** munkalap arcát:

Nyissa meg a **Beállítások > Megjelenítés** menüpontot.



Válassza ki ezen menüpont első almenüjét (**Új objektum igazítása...**)

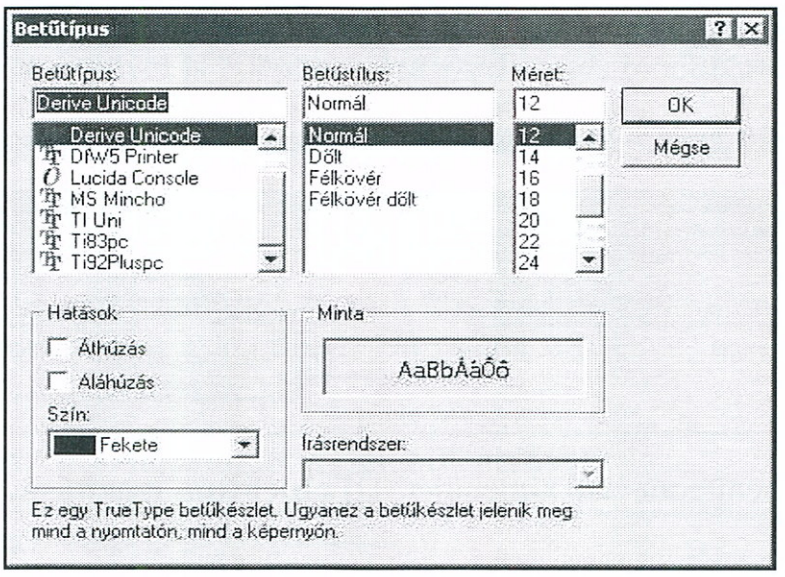


E dialógusablak segítségével szabályozni tudja a **DERIVE** munkalapon ezután megjelenő objektumok igazítását. Az **eredeti kifejezés** olyan kifejezés, amelyet a felhasználó ad meg, vagy amelyet egy művelet segítségével kapunk, de még nincs kiértékelve, az **egyszerűsített kifejezés** pedig egyszerűsítéssel vagy kiértékeléssel megkapott kifejezés. Hasznos lehet, ha a felhasználó által bevitt kifejezéseket balra, a margóhoz igazítjuk, az eredményeket, pedig középre, ahogy az az alapértelmezett beállításban is szerepel.

💻 A MÉGSE gombra kattintva, vagy az ESC billentyű lenyomásával a beállítások megtartásával zárhatja be az ablakot.

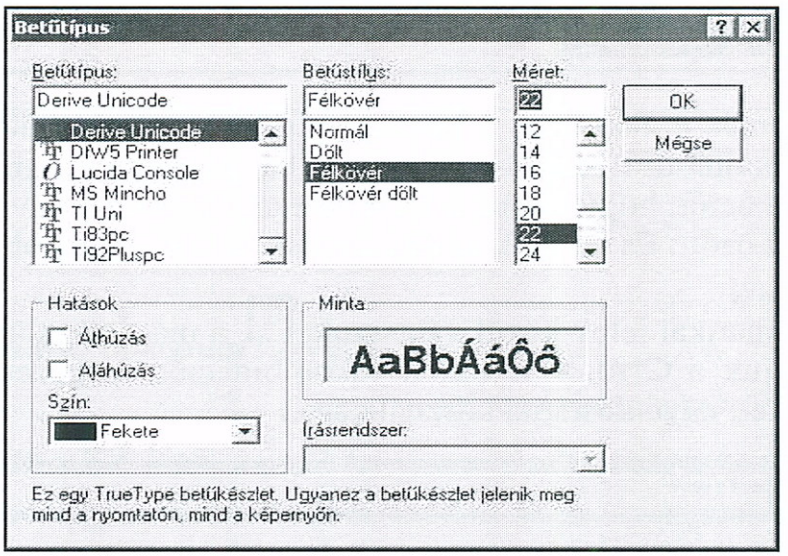
Válassza az **Ablak > Megjelenítés** menüpont következő almenüjét:

💻 Válassza a menü második lehetőségét, **Ablak > Megjelenítés > Összes kifejezés betűtípusa**.



Az ebben és a hasonló dialógus ablakokban megjelenő nyelv az adott operációs rendszer által használt nyelvtől függ.

💻 Változtassa a betűméretet 22-re, és tegye félkövérré…



💻 ..., majd fogadja el a beállításokat az OK gombbal.

#10: SIN(x) + x·y

#11: $(\alpha - 1)^3$

#12: $\alpha^3 - 3\cdot\alpha^2 + 3\cdot\alpha - 1$

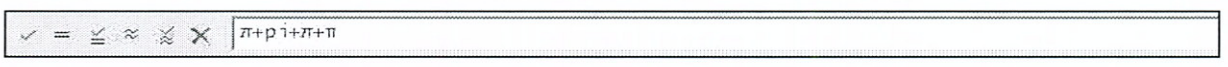
#13: $\text{SIN}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

#14: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ez a betűméret bemutatókon lehet hasznos, különösen, ha vetítőt használunk. Egyéni használatra a kisbetűs megjelenítés kedvezőbb lehet.

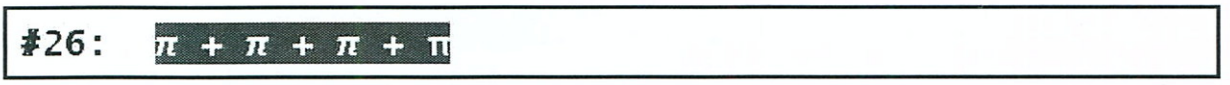
Korábban a π -t a matematikai szimbólumok eszköztárából írtuk be. Számos más lehetőség van a π -, a természetes logaritmus alapját jelölő *e*-, vagy a képzetes számot jelölő *i-hez* hasonló speciális konstansok bevitelére. Nagyon fontos különbséget tenni az e, i nevű változók, illetve a (görög abc-ben található) π, és a nevezetes konstansok között, amelyeket ezen speciális karakterek segítségével ábrázolunk.

💻 Írjuk be a három π összegét, kezdve azzal, hogy a beviteli mezőt az **F2**-vel tesszük aktívvá. Az első π -t válasszuk a jeleket tartalmazó matematikai eszközsorból, a másodikat gépeljük be *pi*-ként, a harmadikhoz válasszuk a CTRL + P billentyű-kapcsolatot. (A + jeleket végig a billentyűzetről írjuk be.). Végül adjunk hozzá még egy π-t a görög betűk eszköztárából.



Ez a három lehetőségünk van a π beírására. A beviteli sorban ugyan különböznek, a bevitel után mind ugyanúgy fog kinézni és ugyanazt jelenti. Megfigyelhetjük a különbséget a konstans és a görög betű formája között.

💻 Zárjuk le a bevitelt egy ENTER-rel.



A természetes logaritmus *e* alapjának a bevitelére szintén három különböző lehetőségünk van. Kihasználva mindhárom lehetőséget, írjuk be összegüket, majd adjuk hozzá az általánosan használt e betűt, hogy lássuk a különbséget az ezzel a névvel ellátott változó és a nevezetes konstans között. És lássunk az egyszerűsítésre is egy újabb példát.

Az első e-t a matematikai jelek közül válasszuk: ê, a másodikat írjuk #e formában és a harmadikhoz használjuk a CTRL + E billentyűkombinációt. Végezetül gépeljük be: +*e*= (Figyeljünk a végére tett egyenlőségjel használatára.)

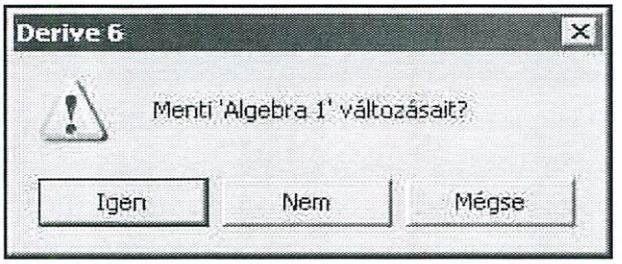
Zárjuk a három *e* és az e mint változó összegének bevitelét az ENTER billentyűvel.

Mivel a kifejezés végére kitettük az egyenlőségjelet, automatikusan egy egyenletet kapunk, melynek bal oldala az egyszerűsítetlen kifejezés, jobb oldala, pedig a neki megfelelő egyszerűsített változat. Ez a módszer egy sorban jeleníti meg mind, az egyszerűsítetlen, mind pedig az egyszerűsített kifejezést, helyet takarítva meg ezzel a munkalapunkon.

Az imaginárius szám bevitelének szintén három módja van. Beírhatjuk az *i* -t a matematikai jelek eszközsorából, a billentyűzetről #i-t gépelve és a CTRL + I billentyűkombinációval.

Fejezzük be ezt a fejezetet a **DERIVE**-ból való kilépéssel. A **Kilépés** utasítás a **Fájl** menüben található:

Lépjünk ki a **DERIVE**-ból a **Fájl > Kilépés** menüpontot használva.



Ha nem akarjuk menteni a munkalapunkat, kattintsunk a NEM / NO gombra.

(A gombokon látható feliratok nyelve megegyezik az operációs rendszer nyelvével.)

Összefoglalás

Algebra Ablak

vagy DEL ..... kijelölt objektumok törlése

vagy **Beszúrás > Szöveg objektum** vagy **F5** .....

.....új szöveg objektum beszúrása az aktív munkalapra

vagy **Képlet készítő > Kifejezés** vagy **F2** .....új kifejezés beírása az aktív munkalapra

vagy **Egyszerűsítés > Egyszerűsítés** ..... kijelölt kifejezés egyszerűsítése

vagy **Egyszerűsítés > Kiértékelés** ..... kijelölt kifejezés kiértékelése

Fájl > Kilépés ..... kilépés a **DERIVE**-ból.

Egyszerűsítés > Kibővít .....kijelölt kifejezés kibővítése

Beállítások > Megjelenítés .....megjelenítés megváltoztatása

Ablak > Testreszabás : Eszköztárak..... az eszköztárak szabályozása

(↑)(↓) .....kijelölt kifejezés mozgat ása fel és le

ESC .....megszakítás parancs

Bal egérgomb kattintás.....kifejezés kijelölése

Bal egérgomb kattintás a szöveg objektumra.....szöveg objektum szerkesztése

Bal egérgomb kattintás szöveg objektum keretére, tőle jobbra, vagy balra .....

..... szöveg objektum kijelölése

Kifejezés szerkesztő eszköztár

, ENTER.....kifejezés beírása

..... egyszerűsített kifejezés beírása

, CTRL + ENTER ..... a kifejezés és az egyszerűsített kifejezés beírása

ESC .....az algebra ablak aktíválása

TAB..... beviteli sor kijelölése

vagy CTRL + P vagy pi ..... π

vagy CTRL + E vagy ˛ê.....a természetes logaritmus alapja *e*

vagy CTRL + I vagy ˛î ..... képzetes egység *i*

, stb. ..... görög betűk

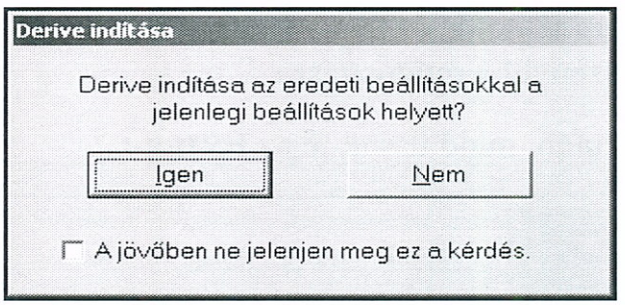
vagy CTRL + Q ..... négyzetgyökjel

2. fejezet

A polinomok zérushelyeinek megkeresése

Ebben a fejezetben elsősorban egy egyszerű matematikai feladatnak szenteljük a figyelmünket, mégpedig a **polinomok zérushelyeinek megkeresésének.** Emellett megtanuljuk a **DERIVE** alapvető technikai használatát.

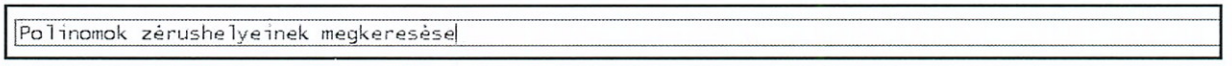
Indítsuk el a **DERIVE**-ot.



A **DERIVE**-val való első találkozáskor hátrahagytunk egy fájlt, amely a kezdeti próbálkozásainkat tartalmazza. Ez a fájl információkat tartalmaz a **DERIVE** bezárása előtti állapotról. A **Derive indítása** párbeszédablak segítségével két indítási mód közül választhatunk: elindíthatjuk a **DERIVE**-ot az alapértelmezett beállításokkal, vagy kérhetjük az előző próbálkozás folytatását is, amely az első fejezet néhány változtatását is tartalmazza. Ezt a könyvet úgy írták, hogy mindegyik fejezet az alapértelmezett beállításokkal kezdődik. Mi azt ajánljuk, hogy Ön is így kezdje a munkát.

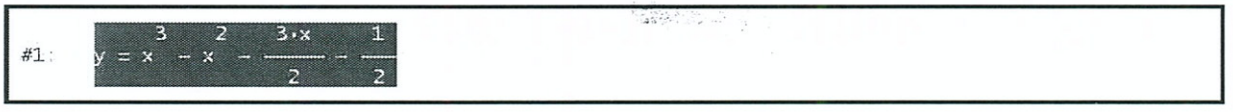
Indítsuk el az alapértelmezett **DERIVE**-ot a párbeszédablak IGEN gombjának lenyomásával.

Kezdjük a dokumentumot a megfelelő főcímmel. Szúrjunk be egy szövegobjektumot a következő felirattal: *Polinomok zérushelyeinek megkeresése.*



Keressük meg a következő polinom zérushelyeit: y=p(x), $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}$

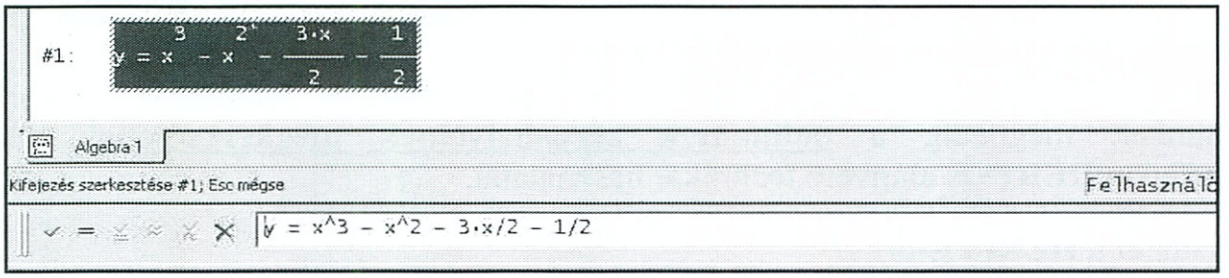
Lépjünk be a fenti többtagú egyenletbe úgy, hogy előkészítjük a kifejezés beírását a gombbal, majd gépeljük be a következő sort: *y=x^3-x^2-3x/2-1/2* (szándékosan hagytuk ki a közepén levő /2-t).



Innentől kezdve az ENTER vagy az OK gombok csak kétértelmű helyzetekben lesznek feltüntetve. Egyszerű kifejezéseknél – mint például a fenti – nem fogjuk használni az előbb említett gombokat. Ezek majd akkor lesznek fontosak, amikor majd azokat a sajátosságokat fogjuk tanulni a fejezetben, amelyek a fenti többtagú egyenlethez kapcsolódnak. Bizonyosodjunk meg arról, hogy a fenti egyenletet helyesen írtuk be.

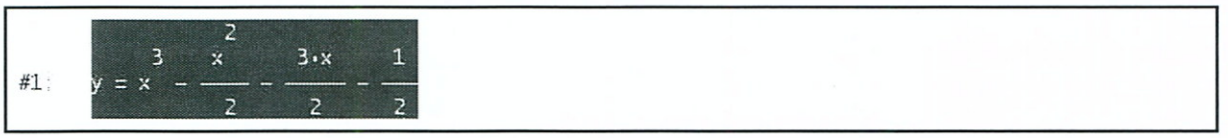
Mint látjuk, nem volt helyes. A /2 kimaradt az egyenlet közepéről. Ezt könnyen kijavíthatjuk úgy, hogy a **Szerkesztés > Kifejezés** parancsot használjuk.

💻 Javítsuk ki a kifejezést a **Szerkesztés > Kifejezés** parancs megadásával.



Eredményként egy másolatot kapunk a kifejezésből. A sor elején villog a kurzor, amely azt jelenti, hogy a rendszer készen áll a módosításra.

💻 Szúrjuk be a */2*-t az x^2 után, majd üssük le az ENTER-t.



Az ENTER leütésével a régi kifejezést egy újjal tudjuk helyettesíteni. Nincs szükség a régi kifejezés kitörlésére, ha a **Szerkesztés > Kifejezés** parancsot használjuk.

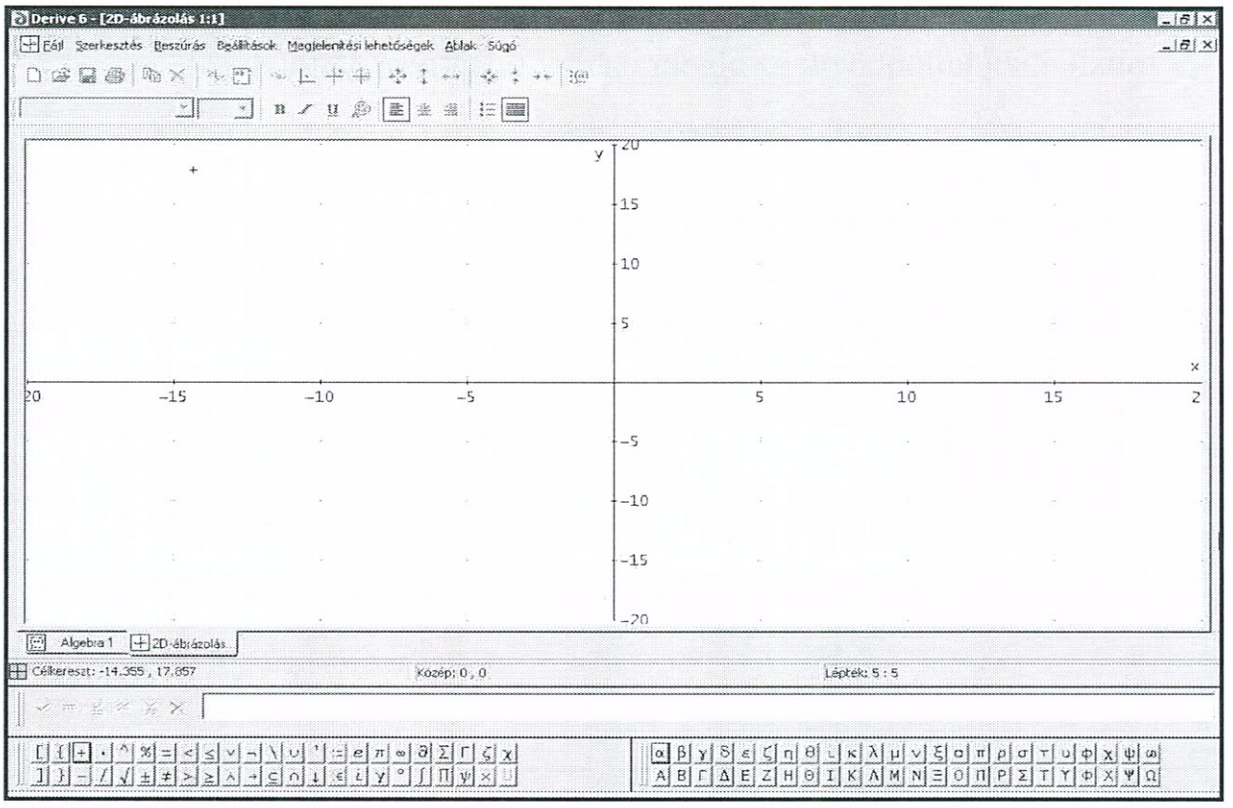
Közelítsük meg a kifejezést több különböző szemszögből is. Minden szemszögből észrevehetünk olyan részleteket, amelyeket a többiből nem látunk meg. Ezen az elven alapulva a matematikusok ábrák egész sorát használják a matematikai objektumokhoz. A negyedfokú polinom úgy jelenik meg, mint egy algebra ábra. A következőben létrehozunk egy *grafikai ábrát*, mivel ez különösen fontos ahhoz, hogy mindent megtudjunk a zérusokról. Más szóval: megtervezzük[3] a grafikont.

Mivel ennek a fejezetnek a fő célja, hogy helyes matematikai munkamódszert adjunk meg, …

💻 … szúrjuk be a következő szöveget:

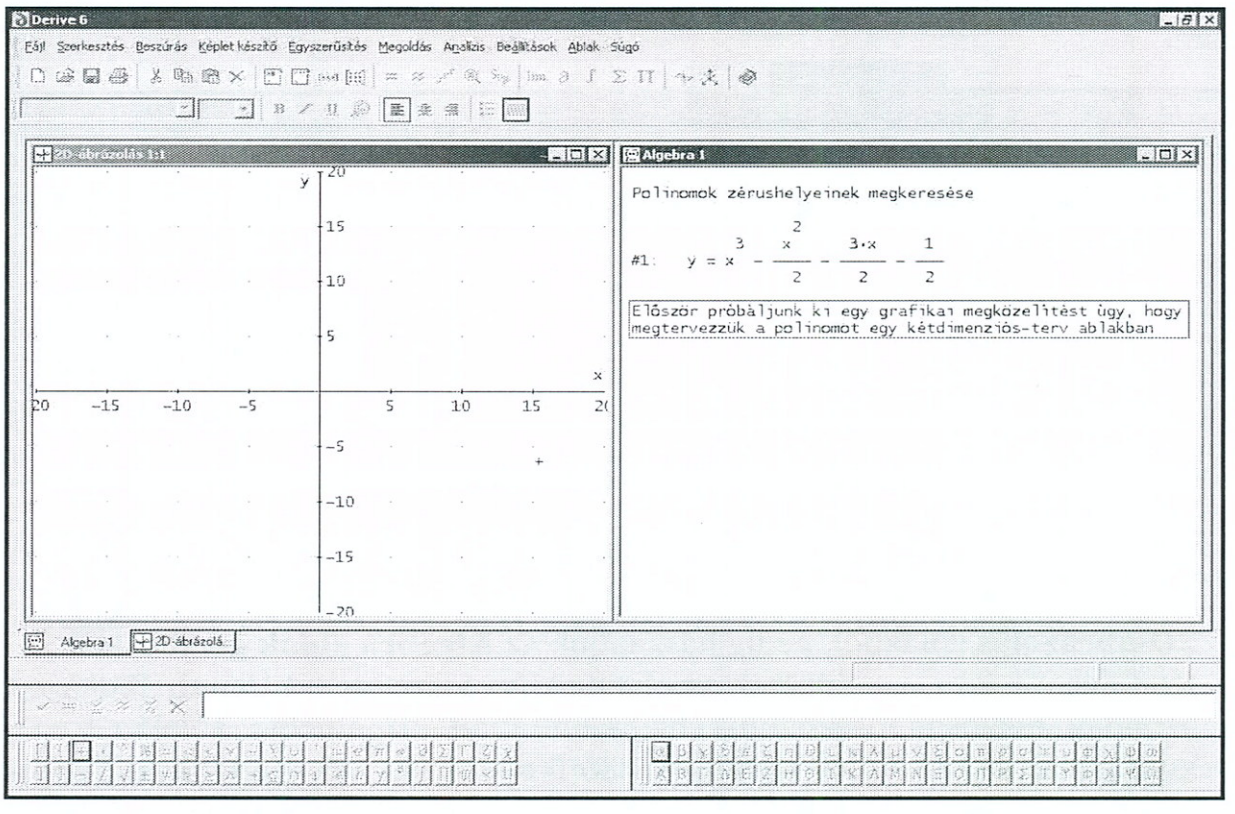
Először próbáljunk ki egy grafikai megközelítést úgy, hogy megtervezzük a polinomot egy kétdimenziós-terv ablakban

💻 Készítsük elő a kétdimenziós grafikon megtervezését: nyissunk ki egy kétdimenziós ábrázolási ablakot a **2D-ábrázolás ablak** gombjának lenyomásával, vagy adjuk meg az **Ablak > Új 2D-ábrázolási ablak** parancsot.



A **DERIVE** létrehozta a terv ablakot, így most két ablakkal is tudunk dolgozni: egy algebra ablakkal és egy 2D-ábrázolás ablakkal. Használjuk a hagyományos **WINDOWS** technikákat az ablakok között történő váltásoknál, vagy egyszerűen változtassuk meg a méretüket (kis méret parancs).

Tegyük az ablakokat egymás mellé úgy, hogy az **Ablak > Egymás mellett** parancsot használjuk.

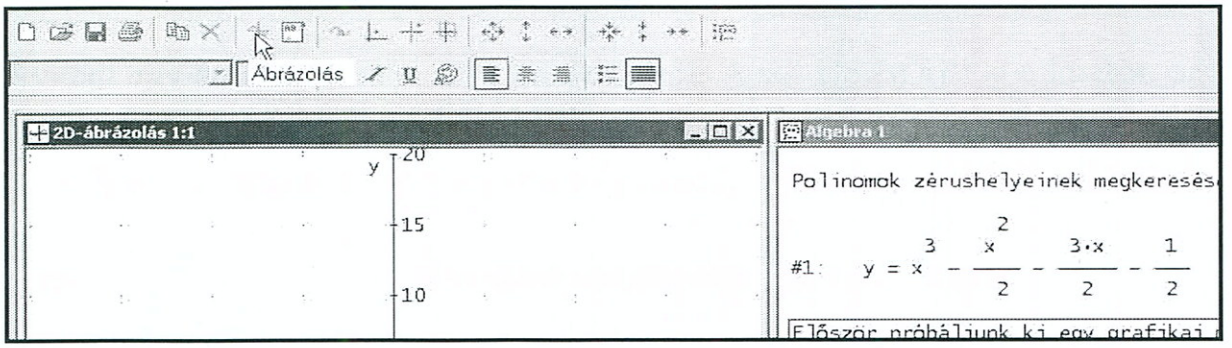


Mind a két ablak (**2D-ábrázolás** és **Algebra**) bal felső sarkában fel van tüntetve az ablak neve. Az aktív ablak címsora mindig kék színű; az inaktívé, pedig halványszürke.

Mivel a **2D-ábrázolás ablak** aktív állapotban van, a Menüsor, a Parancssor és az Állapotsor mindenben különbözik az algebra ablak tulajdonságaitól:

- A **Célkereszt** adja meg a mozgó kereszt koordinátáit,
- A **Közép** határozza meg a kép középpontjának koordinátáit,
- A **Lépték** állapítja meg a skála léptékét,
- A keresztezett négyzet alakú ikon – amely a **Célkereszt** szó előtt található – jelzi a derékszögű koordinátákat.

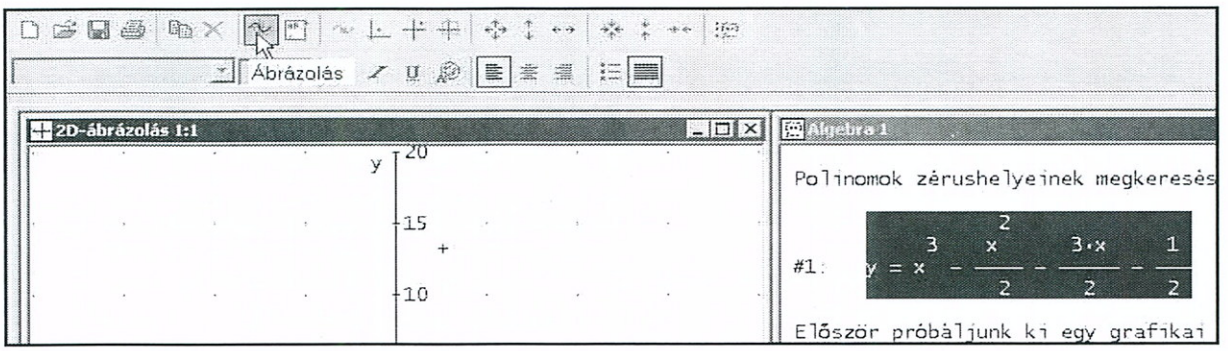
Rajzoljuk meg a grafikont az **Ábrázolás** gomb alkalmazásával.



Hoppá – az **Ábrázolás** gomb hozzáférhetetlen.

Ennek az oka az, hogy az **Ábrázolás** gomb (csakúgy, mint a **Beszúrás** > **Ábrázolás** parancs) határozza meg azt a ponthalmazt, amelyet az algebra ablak kijelölt kifejezése ad meg, de jelenleg a második szövegobjektum van kijelölve, és a szövegobjektumot nem tudjuk ábrázolni.

Jelöljük ki a polinomot úgy, hogy rákattintunk (ez a művelet teszi aktívvá az algebra ablakot), majd tegyük ismét aktívvá a **2D-ábrázolás ablak**ot úgy, hogy rákattintunk a Címsorára.



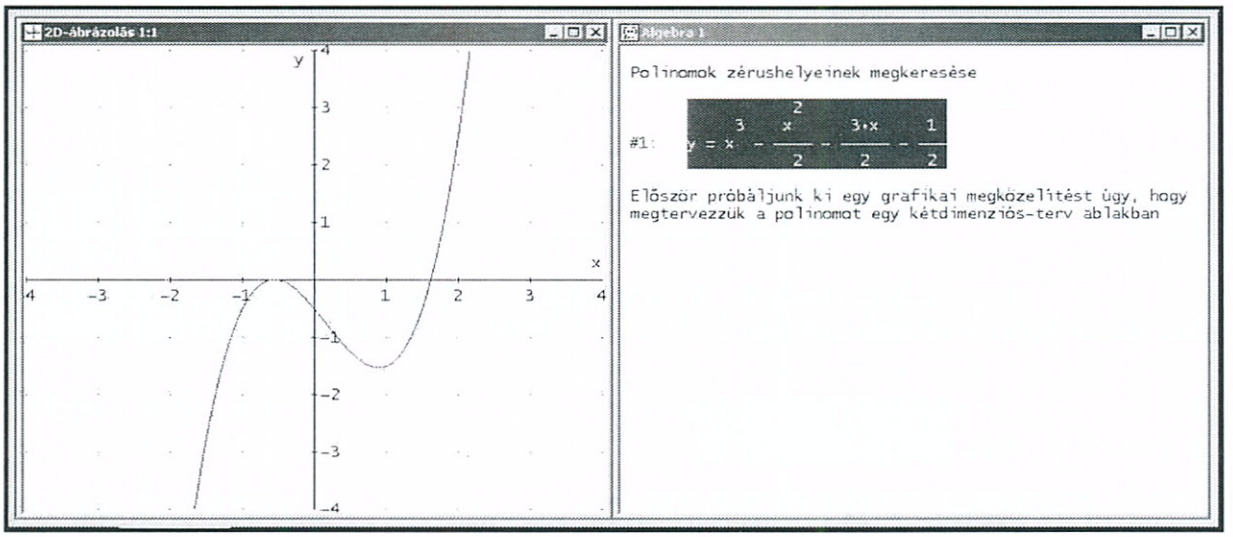
Számos technikája van annak, hogyan tegyük aktívvá a különböző ablakokat:

- Használjuk a CTRL + **F6** billentyűkombinációt a másik ablak aktívvá tételéhez.
- Az algebra ablakból használjuk az eszköztár **2D-ábrázolás ablak** gombját, a **2D-ábrázolás** ablakból, pedig használjuk az **Algebra ablak** gombot.
- Kattintsunk arra az ablakra, amelyet aktívvá szeretnénk tenni. Ezt a módszert azonban óvatosan használjuk: ha rákattintunk az algebra ablakra az egér bal gombjával, akkor ezzel kijelöljük azt. Viszont, ha rákattintunk a **2D-ábrázolás** ablakra az egér bal gombjával, akkor elmozdíthatjuk a keresztet. Ezek váratlan effektusokat eredményezhetnek. Ezért inkább kattintsunk az egér bármelyik gombjával az ablak Címsorára.

- 2D-ábrázolási ablakból a CTRL + 1 billentyűkombinációt is használhatjuk az Algebra ablakba való áttéréshez.

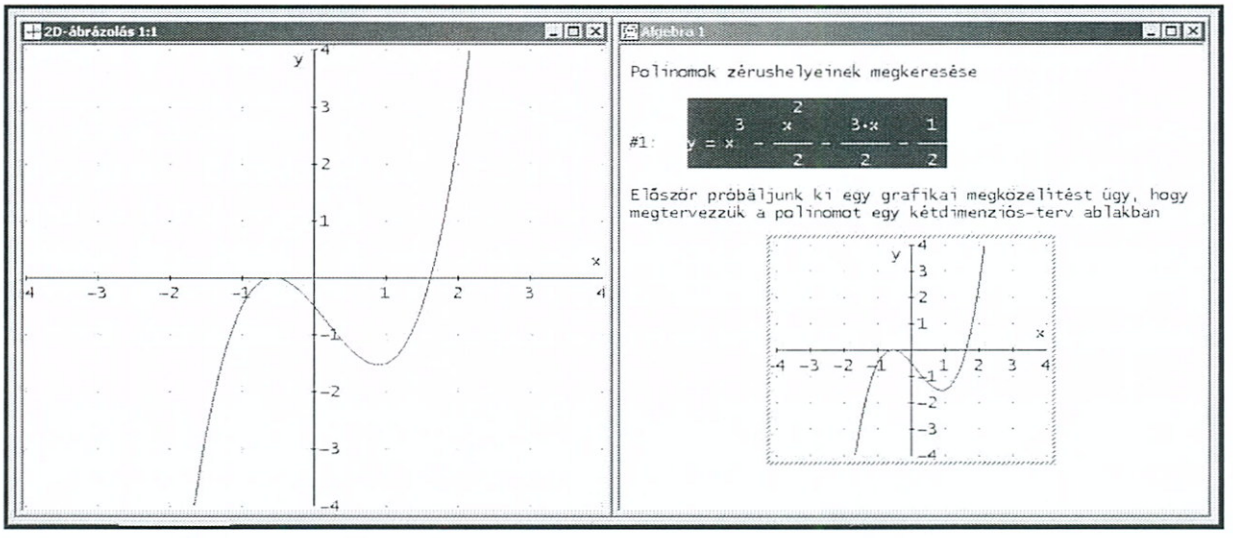
Most, hogy a **Kifejezés ábrázolása** gomb már használható, meg tudjuk tervezni a polinomot.

💻 Rajzoljuk meg a polinom grafikonját az **Ábrázolás** gomb alkalmazásával.



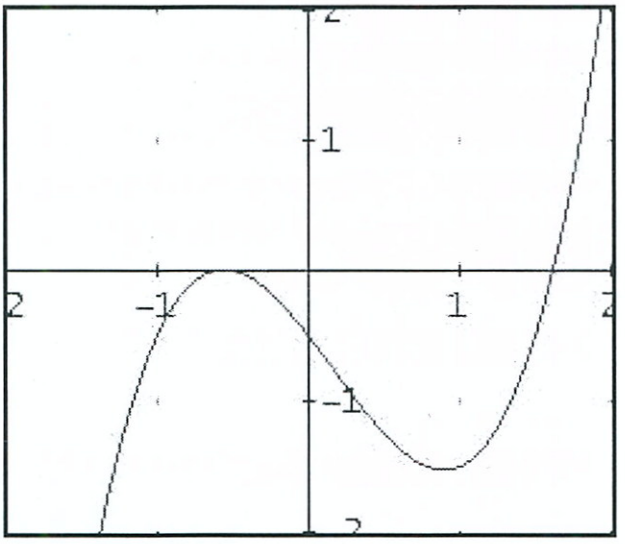
Most már rendelkezésünkre áll a polinom algebrai és grafikai ábrázolása is. Azonban a grafikai ábra az algebra ablakon *kívül* található, mégpedig a saját független tervablakában.

💻 Másoljuk be az aktuális tervablakot az algebra ablakba a **2D-ábrázolás** ablak **Fájl** > **Beágyazás** parancsának segítségével.



Ez a parancs „rögzíti" a tervablak aktuális állapotát a munkalapra. A tervablak most inaktív állapotban van, a beágyazott ábra azonban aktív. A beágyazott ábrát bármikor visszahelyezhetjük a tervablakba az egér gombjának kétszeri lenyomásával.

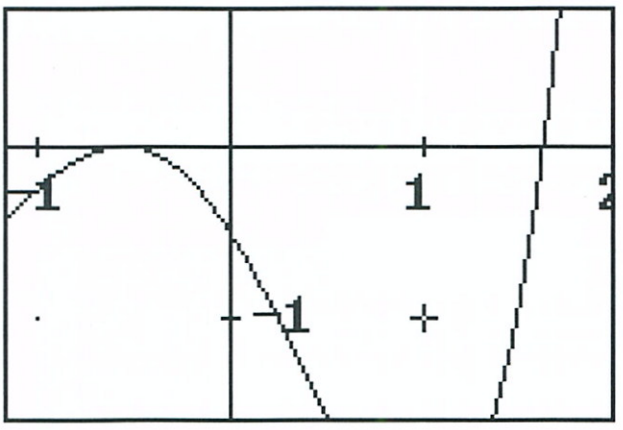
A grafikus ábrázolás főleg a polinom zérusok keresésénél előnyös. Azonban az aktuális kép nem tiszta, ha két, három vagy négy különböző zérusa van a polinomnak. A megoldást könnyen megtalálhatjuk, ha megvizsgáljuk a grafikont a mozgatható kereszttel. A koordináták az állapotsorban találhatók, amelyek most a kereszt kezdeti állapotát mutatják (1,1).

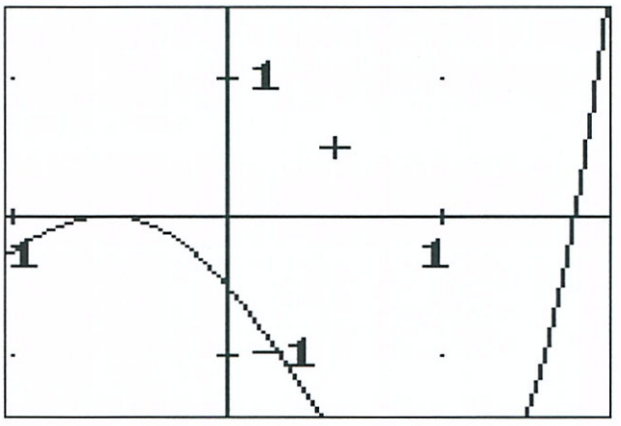


A kereszt színét megváltoztathatjuk a **Megjelenítési lehetőségek** > **Megjelenítés** > **Célkereszt** parancs használatával.

Ha a tervablak aktív, a kereszt helyét megváltoztathatjuk mind az egér, mind, pedig a jobb, bal, fel, le gombok alkalmazásával.

💻 Mozdítsuk el az egeret (1, -1) irányban, majd nyomjuk le az egér bal gombját, és tegyük a keresztet új pozícióba (bal kép). Használjuk a nyilakat a kereszt (0.5, 0.5) pontba helyezéséhez. Próbáljuk ki a CTRL + →, a CTRL + ←, a CTRL + ↑ és a CTRL + ↓ parancsokat a kereszt nagyobb léptekben történő elmozdításához.

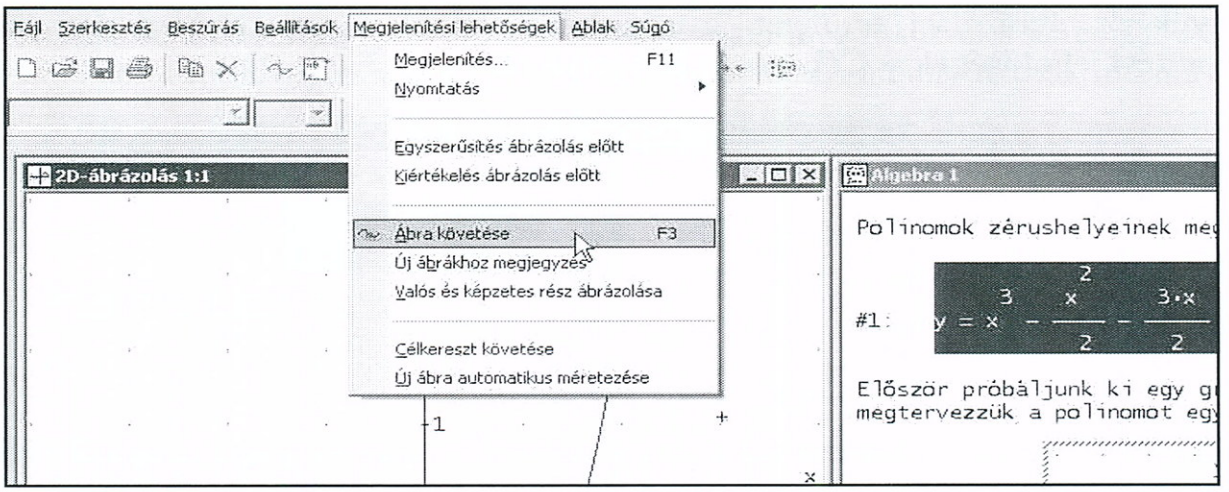




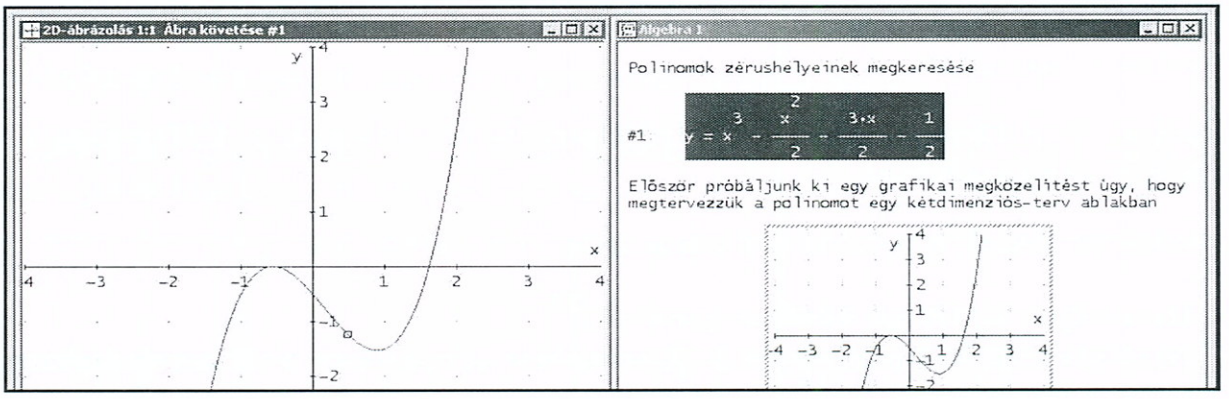
A HOME billentyű a tervablak közepébe helyezi a keresztet.

A nyomkövetőt érdemes alkalmazni a görbék vizsgálatánál. Ezt a módot ki-, és bekapcsolhatjuk az **Ábra követése** gombbal, az **Megjelenítési lehetőségek>Ábra követése** paranccsal vagy az **F3** billentyű lenyomásával. Ahogy az a hagyományos Windows programoknál szokás, a parancs tulajdonságaival megegyező gomb a megfelelő menüben mindig a parancstól balra, míg a gyorsbillentyű a parancstól jobbra helyezkedik el. Most ezt válasszuk ki az **Megjelenítési lehetőségek** > **Ábra követése** parancsból:

💻 Nyissuk ki az **Megjelenítési lehetőségek** menüt.



Kapcsoljuk be az **Ábra követése** módot.



Ha az **Ábra követése** mód aktív, a kereszt helyén egy négyzet tűnik fel, amely függőlegesen a görbére ugrik anélkül, hogy a vízszintes koordinátákat megváltoztatná. A görbe száma a tervablak Címsorában található (valahogy így: **Ábra követése #1**[4]).

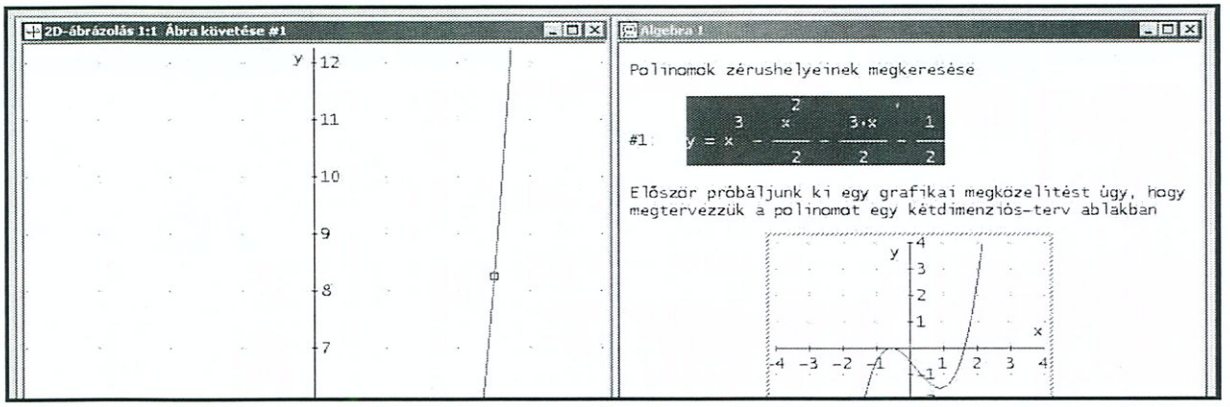
Mikor az **Ábra követése** mód már be van kapcsolva, a négyzetet csak a görbe mentén tudjuk mozgatni. Ilyenkor használhatjuk a jobbra, balra gombokat, illetve „nagyobb ugrásokhoz" a CTRL + → és a CTRL + ← billentyűket. Ezen kívül az egér gombjait is használhatjuk úgy, hogy a kívánt pozícióba helyezzük az egeret, majd lenyomjuk a bal gombot. Ha egyszerre több grafikon is látható, használjuk a fel, le gombokat egy másik grafikon kiválasztásához.

Gyakoroljuk a négyzet mozgatását. Használjuk a nyilakat és az egeret a négyzet mozgatásához, végül pedig nyomjuk le az egér bal gombját a (2.5, 0) pontban.

Mi történt a négyzettel? Eltűnt. Az állapotsorban megtaláljuk az eltűnés okát. A négyzet függőleges koordinátája 18. 5625, vagyis a négyzet az aktuális területen kívül található. Használjuk a **DERIVE** súgóját arra, hogyan tudjuk a területet a négyzetre vagy a keresztre vinni.

[4] A helyhiány miatt ez csak az „Egy grafikon követésének funkcióját a ...# kifejezés határozza meg" rövidítése.

💻 Vigyük az ábrázolási területet arra a helyre, ahol a kereszt van úgy, hogy a **Megjelenítési lehetőségek > Célkereszt követése** parancsot használjuk.



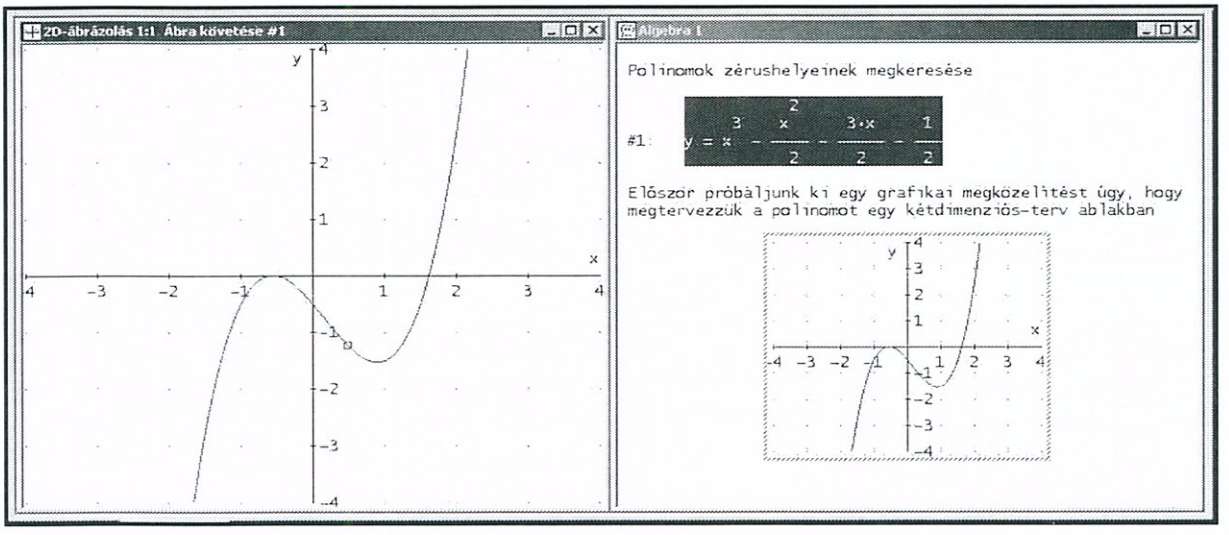
A tervablak „követi" a négyzetet. Ez azt jelenti, hogy a terv függőleges és vízszintes értéktartományai automatikusan megváltoztak a kereszt láthatóságának biztosítása érdekében. Mivel ez a módszer megszüntetheti a kiválasztott értéktartományt, a követési módot óvatosan használjuk.

💻 Kapcsoljuk ki a követési módot a **Megjelenítési lehetőségek > Célkereszt követése** parancs újbóli alkalmazásával.

Számos módszer létezik a korábbi értéktartomány visszaállítására:

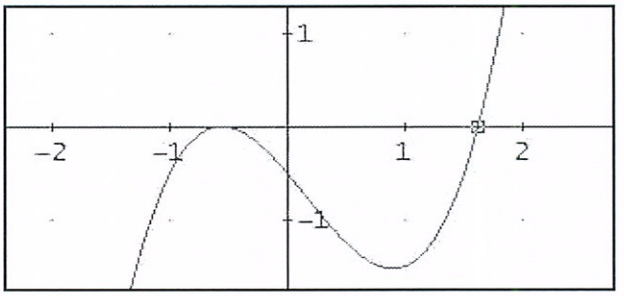
- Használjuk az **Origó középre** gombot ⊞.
- Alkalmazzuk a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Hosszúság/középpont** vagy a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Minimum/maximum** parancsot, ezután nyomjuk le a **Törlés** gombot, végül pedig hagyjuk el a párbeszédablakot az OK segítségével.
- Ha lehet, duplán kattintsunk az eredeti grafikon beágyazott verziójára. Az utolsó művelet különösen kényelmes.

💻 Állítsuk vissza az eredeti grafikont úgy, hogy duplán rákattintunk a beágyazott grafikonra.



A követési módot elveszítettük, mivel a beágyazott grafikont még a követési mód bekapcsolása előtt hoztuk létre. Kapcsoljuk be újra a követési módot, hogy elkezdhessük a polinom zérushelyeinek keresését.

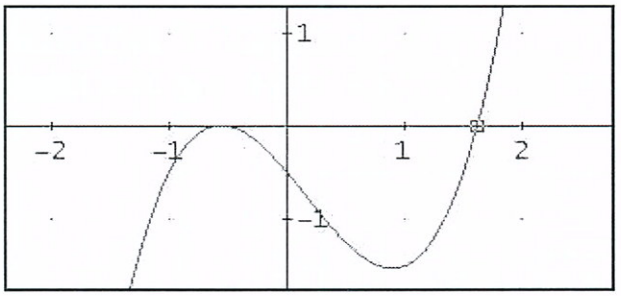
Kapcsoljuk be a követési módot a gombbal, majd mozdítsuk el a keresztet a baloldal legtávolabbi zérusához, olyan közel a vízszintes tengelyhez, amennyire csak tudjuk.

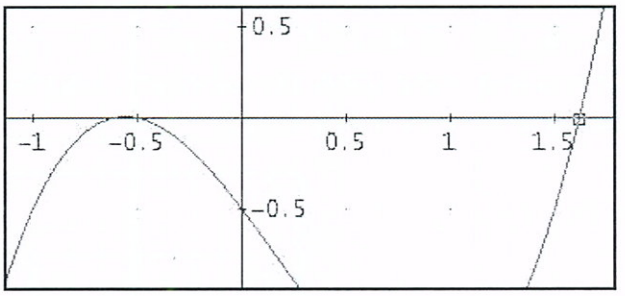


A **DERIVE** kijelzi a négyzet koordinátáit, úgymint Célkereszt: 1,62, 0,01688368 (az Ön koordinátái különbözőek lehetnek). Használjuk a bal nyilat a négyzet elmozdításához a Kereszt: 1,6, -0,1512 koordinátába.

Nem tudjuk pontosan meghatározni azt a helyet, ahol az y koordináta zérus, de azt igen, hogy a polinom zérus 1.6 és 1.62 között van, talán kicsit közelebb az 1.62-höz. Minél közelebbi a koordináta, annál nagyobb a grafikon.

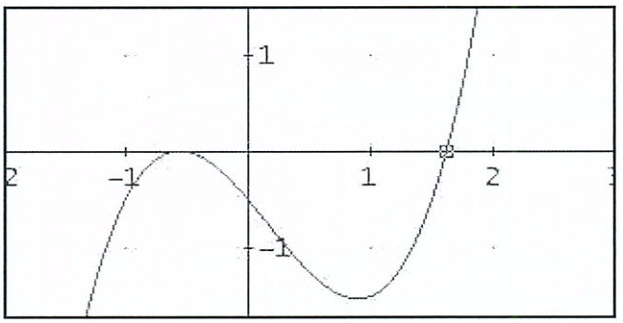
A közelítéshez használjuk az eszköztár **Közelítés** gombját (bal kép), majd vigyük a négyzetet a jobboldal legtávolabbi zérusához.





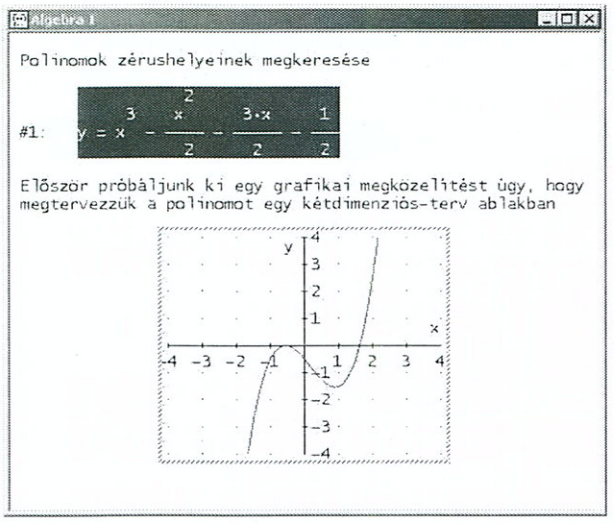
Megkaptuk a Célkereszt: 1.62, 0.01688368 és Célkereszt: 1.61, -0.06817304 koordinátákat (illetve az ön által kapott koordinátákat), így a polinom zérushelye 1.61 és 1.62 között van.

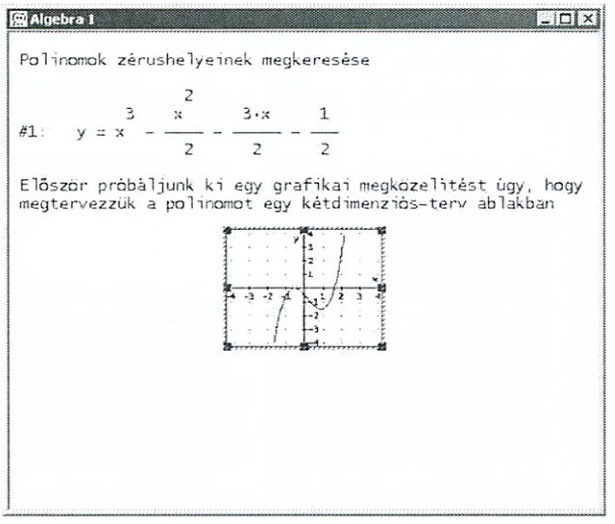
Állítsuk vissza az eredeti méretet úgy, hogy a **Távolítás** gombot használjuk.



Hogy rögzítsük felfedezésünket, szúrjuk be a megfelelő szövegobjektumot.

Lépjünk be az algebra ablakba. Méretezzük újra a grafikont: jelöljük ki az ábrát úgy, hogy rákattintunk. Az ábra 8 fekete négyzettel van körülvéve, ezeket az újraméretezéshez tudjuk használni. Vigyük az egér mutatóját a bal alsó sarokhoz addig, amíg meg nem jelenik egy kétfejű nyíl. Nyomjuk le és tartsuk az egér bal gombját. A gomb nyomva tartásával mozgassuk a mutatót az ábra középpontja felé. Mikor elérte a kívánt méretet, engedjük el a gombot.





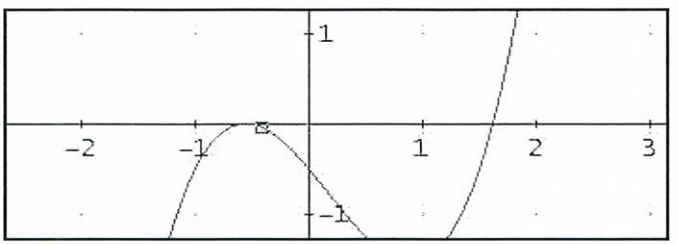
Ha nem tetszik az új ábra, könnyedén visszaállíthatjuk az eredeti méretet.

Szúrjunk be egy szövegobjektumot a módszer és az eredmény rögzítésére.

Szúrjunk be egy új szövegobjektumot, és írjuk be a következő szöveget (az ön által meghatározott számokat használja):

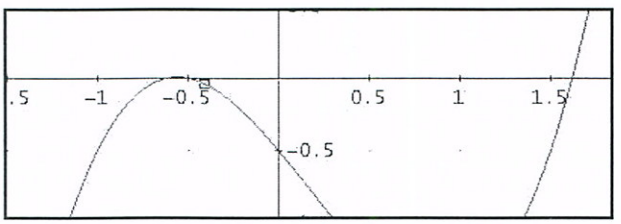
> Követés módban azt találtuk, hogy 1.61 < x < 1.62.

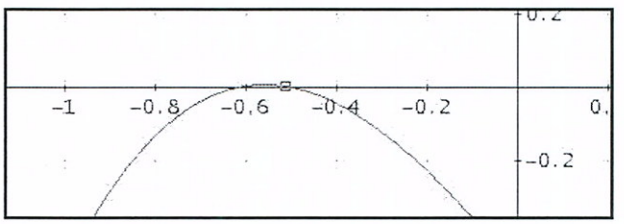
Keressünk még több zérushelyet: tegyük aktívvá a tervablakot, majd vigyük a négyzetet valahova x = -1 és x = 1 közé.



Egy zérushelyet -0.6346154 és –0.6153486 között találunk. Egy másik zérushely x=-0.5-nél van (az ön által meghatározott értékek ismét különbözhetnek). Ahhoz, hogy a grafikon mutassa a metszéspontokat, nagyobbítsuk meg újra.

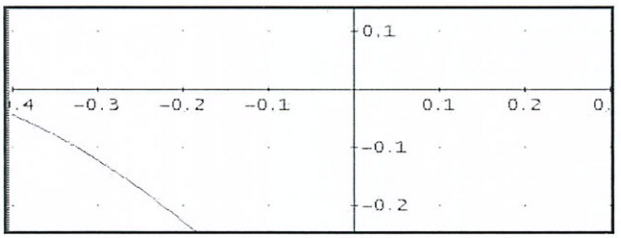
Használjuk kétszer a **Közelítés** gombot.

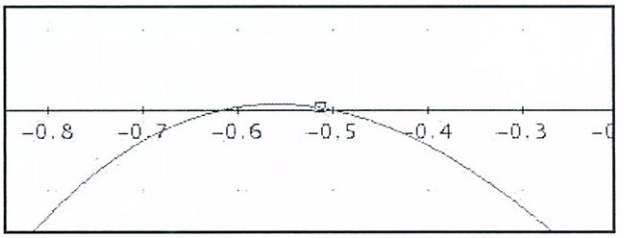




Magától értetődő, hogy két zérushely van. Folytassuk a grafikon nagyobbítását.

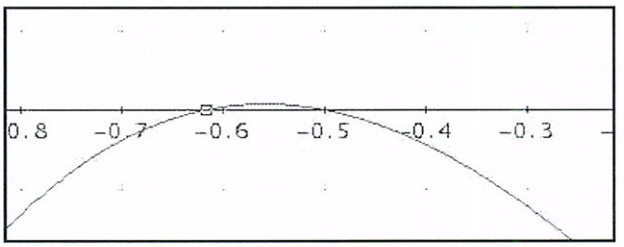
Közelítsünk még egyszer a gombbal és hagyjuk, hogy a négyzet elhagyja a tervablakot, mivel a követési mód ki van kapcsolva (bal kép). A **Célkereszt középre** gomb megváltoztatja az ábrázolási tartományt, így a négyzet/kereszt az ábra központjába kerül.





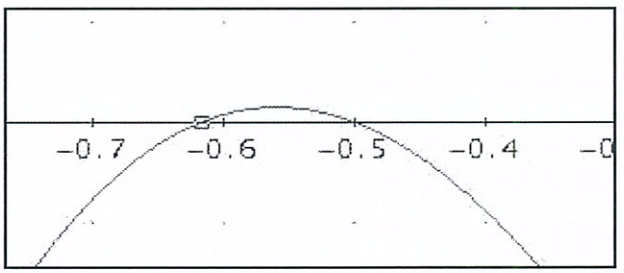
Mozgassuk a keresztet úgy, hogy egy jobb képet kapjunk a bal zérushelyről.

💻 Vigyük a keresztet a bal zérushely közelébe, és olvassuk le a kereszt koordinátáit az Állapotsorban.



Az előjel megváltozása x=-0.6192308 és x=-0.6173077 között következik be. Hozzunk létre egy meredekebb metszésekkel ellátott grafikont, hogy még pontosabb eredményt kapjunk.

💻 Használjuk a függőleges közelítést úgy, hogy lenyomjuk a **Közelítés függőlegesen** gombot

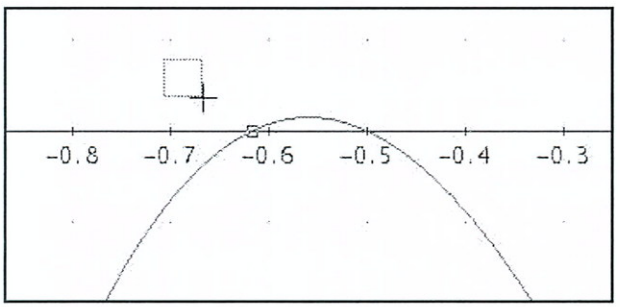


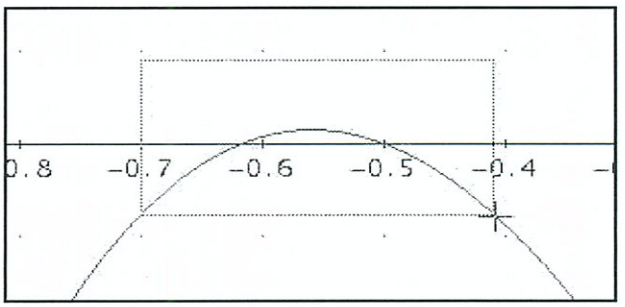
Ajánlatos alkalmazni az **Értéktartomány beállítása** gombot , mely grafikusan lehetővé teszi egy négyszög kivágását.

💻 Vágjuk ki a négyszöget az **Értéktartomány beállítása** gomb lenyomásával .

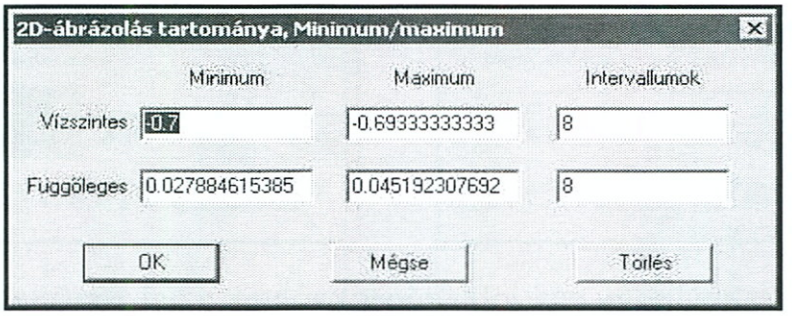
A kurzor átváltozik szálkeresztté.

💻 Jelöljük ki a négyszöget: kattintsunk az egér bal gombjával a kívánt terület bal alsó sarkára. Húzzuk lefelé az egeret addig, amíg a négyzet körül nem veszi a kívánt területet.



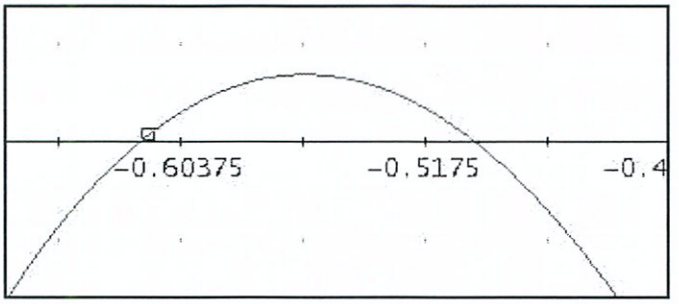


💻 Engedjük el az egér gombját.



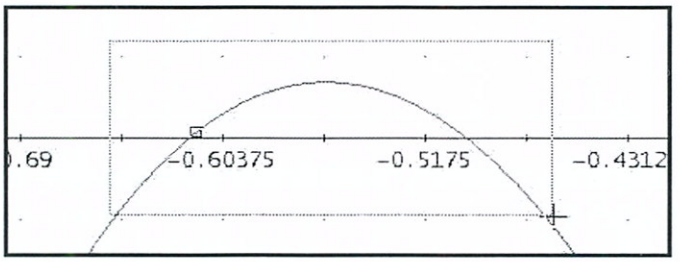
A képernyőn megjelent a **2D-ábrázolás tartománya, Minimum/maximum** párbeszédablak, mutatva az egér által kijelölt terület koordinátáit. Ez a párbeszédablak jelenik meg először, ha a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Minimum/maximum** parancsot alkalmazzuk. Az ábrázolási tartomány beállításának grafikus módszere sokkal gyakrabban kerül alkalmazásra.

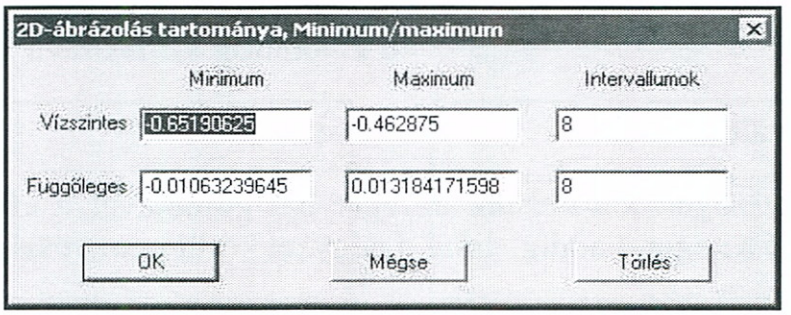
💻 Nézzük meg mit kapunk, ha jóváhagyjuk az OK-val.



Vizsgáljuk meg a bonyolult számokat a jelölés alatt (az Ön számítógépén más számok lehetnek), illetve az Állapotsorban. Ezt a négyszög grafikus kijelölése okozta.

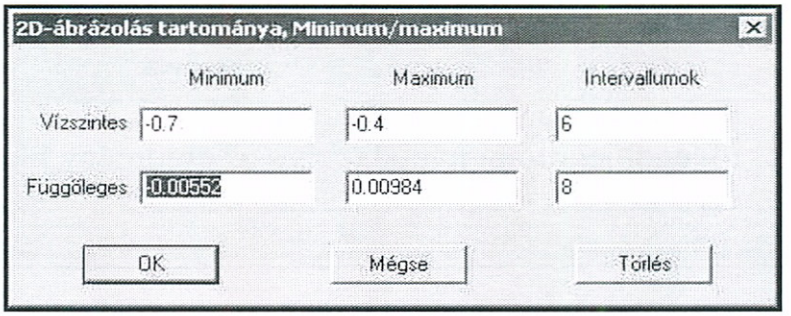
💻 Közelítsünk rá újra az ábrára az **Értéktartomány beállítása** gomb lenyomásával.





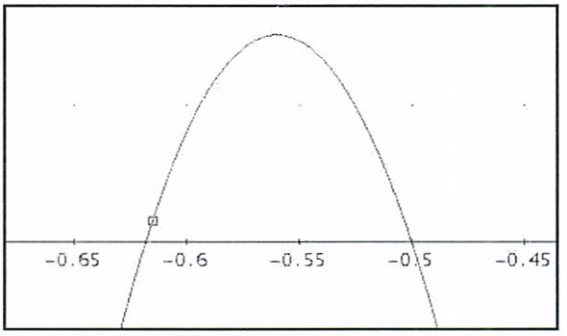
Segítségünkre lehet, ha a megjelent sokjegyű számokat a hozzájuk közeli egyszerű számokkal helyettesítjük. Kezdjük azzal, hogy felülírjuk a beviteli mező kijelölt értékét a **Vízszintes Minimum** számára. Ezután nyomjuk le a TAB-ot, hogy aktívvá tegyük a következő beviteli mezőt. Írjuk be a következő értékeket.

💻 -0.7 TAB –0.4 TAB 6 TAB



Írjuk be az értékeket az Intervallumok mezőbe úgy, hogy megfeleljen a **Minimum** és **Maximum** mezőkbe írt értékek különbségének. Például, 6 darab 0.3 hosszúságú intervallum a vízszintes sorban (= a -0.7 és -0.4 különbségével) a tengely-beosztásokat jól állítja be.

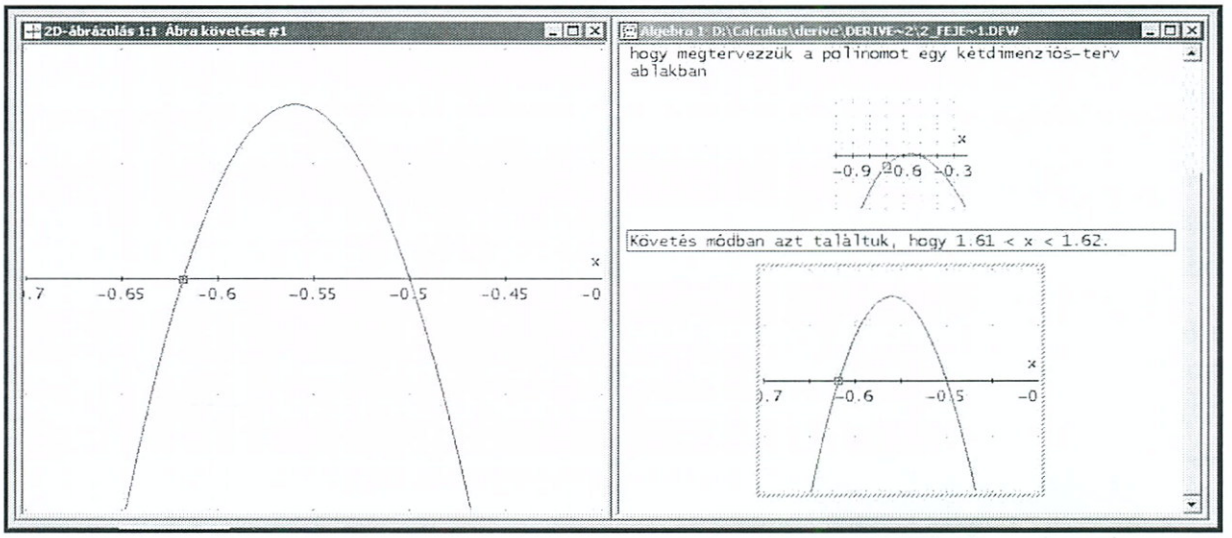
⌨ -0.01 TAB 0.01 TAB 4 OK



⌨ Használjuk az **Ábra követése** módot a két zérushely megközelítésére.

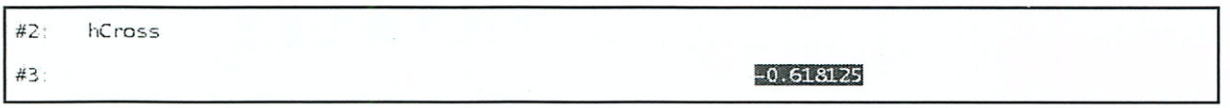
A bal zérus –0.6185714 és –0.6178571 között; a másik pedig valószínűleg –0.5-nél található. A fenti munkákat dokumentálnunk kellene az algebra ablakban egy grafikon és egy szövegdoboz beszúrásával.

⌨ A 2D-ábrázolási ablakból adjuk meg a **Fájl > Beágyazás** parancsot, majd tegyük aktívvá az algebra ablakot, és méretezzük újra a beágyazott ábrát.

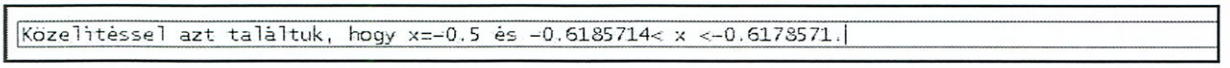


A *hCross*, és a *vCross* változók segítségével hivatkozhatunk a célkereszt koordinátáira az Algebra ablakban.

⌨ Írja be és értékelje ki: *hcross*

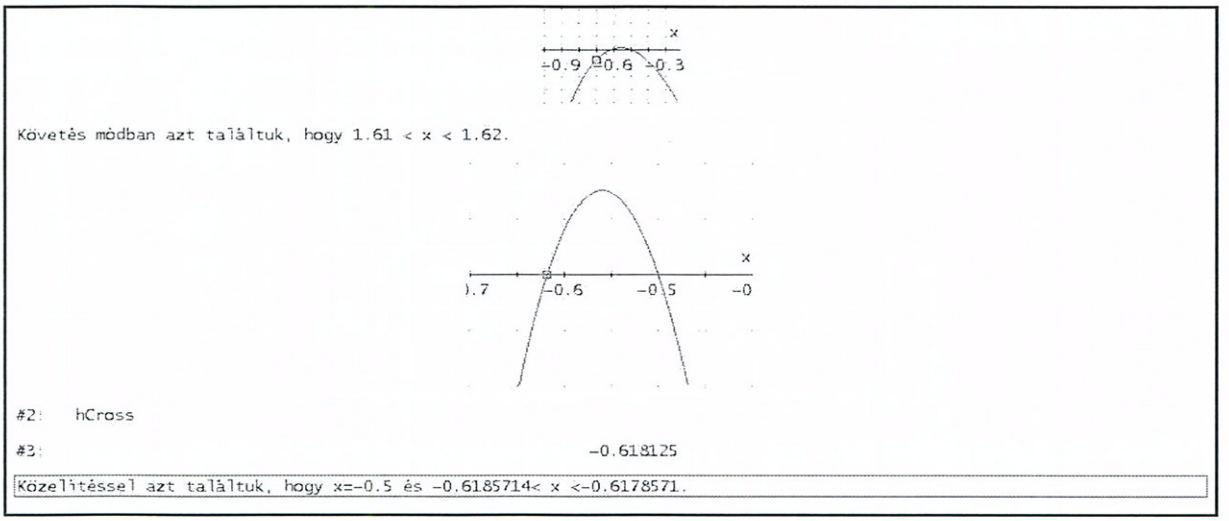


Szúrjunk be egy új szövegobjektumot a módszer és az eredmény bizonyítására.



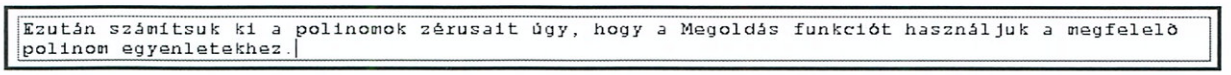
Zárjuk be a 2D-ábrázolási ablakot, majd nyissuk ki az algebra ablakot teljes méretre.

Zárjuk be a 2D-ábrázolási ablakot úgy, hogy a bal gombbal rákattintunk az ablak jobb felső sarkában lévő gombra. Nyissuk ki az algebra ablakot teljes méretben úgy, hogy rákattintunk az ablak jobb felső sarkában lévő gomb melletti gombra.



Ezután, számítsuk ki a zérusokat úgy, hogy megoldjuk a megfelelő polinom egyenletet. Mielőtt ezt megtennénk, írjunk be egy megfelelő szöveges leírást a szemléletünkről.

Írjuk be a szöveget:



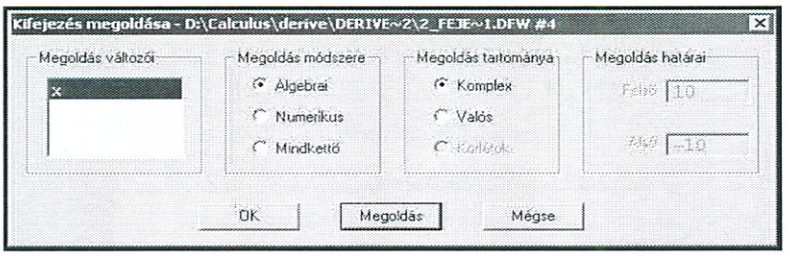
Emeljük ki a #1 polinomot, az **F2** segítségével vigyük a fókuszt a belépési vonalba (kifejezések írására alkalmas gyorsbillentyű), majd készítsünk másolatot a polinomról az **F3** gyorsbillentyű segítségével.

Az **F2** a leggyakrabban használt gyorsbillentyű.

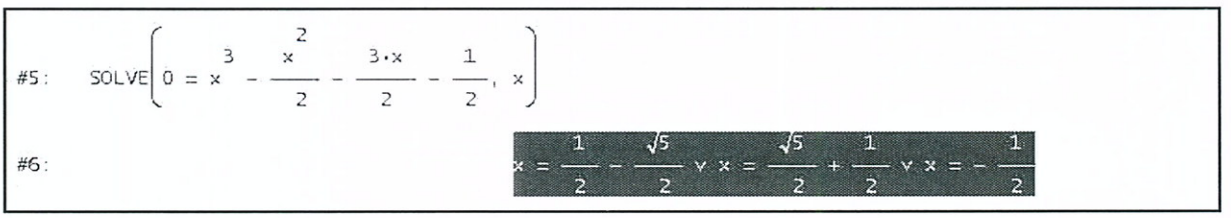
Cseréljük ki az y-t 0-ra, majd nyugtázzuk a bevitelt az ENTER-rel.

Az egyenlet megoldásához egyaránt használhatjuk a **Megoldás > Kifejezés** parancsot vagy a megfelelő eszköztár gombot.

Készítsük elő az egyenlet megoldását úgy, hogy lenyomjuk a **Megoldás** gombot.



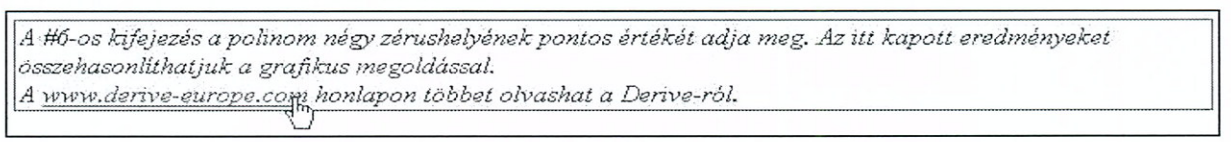
Oldjuk meg az egyenletet. Fogadjuk el az összes ajánlott paramétert a **Megoldás** gombbal.



A $\vee$ jel a logikai **vagy** művelet matematikai jelölése.

Hasonlóan a Beviteli Eszköztár **Beírás és Egyszerűsítés** gombjához, a Megoldás hozza létre mind a nem egyszerűsített kifejezést (amely a Megoldás funkció formális alkalmazása egyenletekre), mind pedig az egyszerűsített kifejezést (amely az egyenlet megoldása). Az OK gombbal csak nem egyszerűsített kifejezést tudunk létrehozni.

Írjuk be a szöveget: „*A #6-os kifejezés a polinom négy zérushelyének pontos értékét adja meg*".



Ha URL címet írunk be, a **DERIVE** rögtön linkként kezeli.

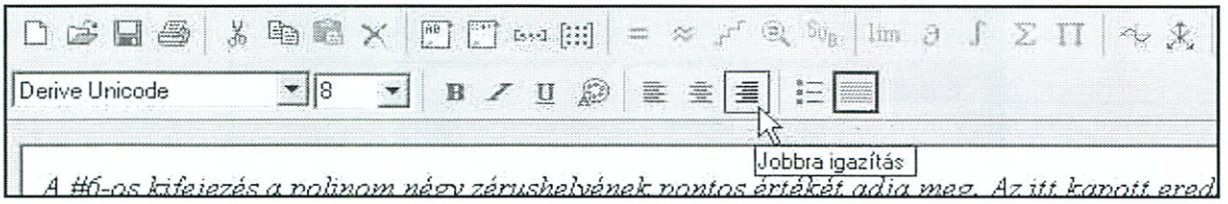
Becsüljük meg a #6-os kifejezést úgy, hogy először kijelöljük, majd használjuk a **Kiértékelés** gombot.

Ahhoz, hogy ez a munkafelület egy jó matematikai dokumentum legyen, meg kell szerkesztenünk. Ezután mentsük el, végül pedig nyomtassuk ki. Először írjuk alá, majd lássuk el dátummal is.

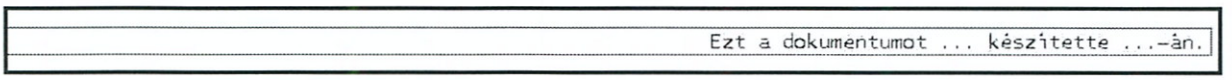
Kapcsoljuk be a **Formátum** Eszköztárat az **Ablak** > **Testreszabás** menüpont segítségével.

Az összes mező és gomb szürke egészen addig, amíg egyetlen szövegobjektum sincs szövegszerkesztő módban.

Adjunk egy szövegobjektumot a munkafelület végéhez a gombot használva. Válasszunk ki az aláírás számára egy speciális formátumot: a Formátum Eszköztárban írjuk át a betűméretet 8-ra, majd nyomjuk le a **Jobbra igazítás** gombot.



Írjuk be a következő szöveget:

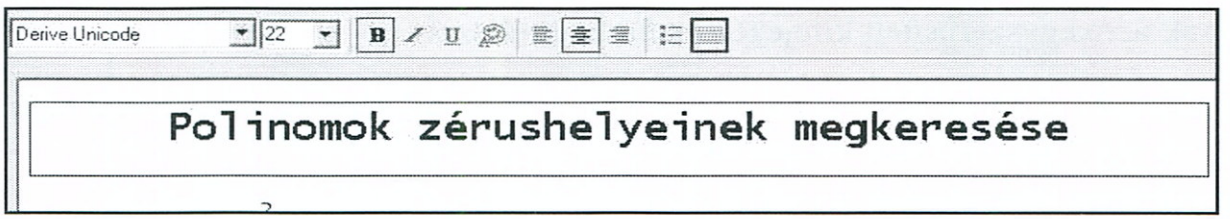


A következőkben változtassuk a legelső szövegmezőt egy figyelem-felhívó címsorrá:

Jelöljük ki az első szöveget valamely használatos kijelölési móddal.

Válasszunk egy formátumot, amely megfelelő a címsor számára, például...

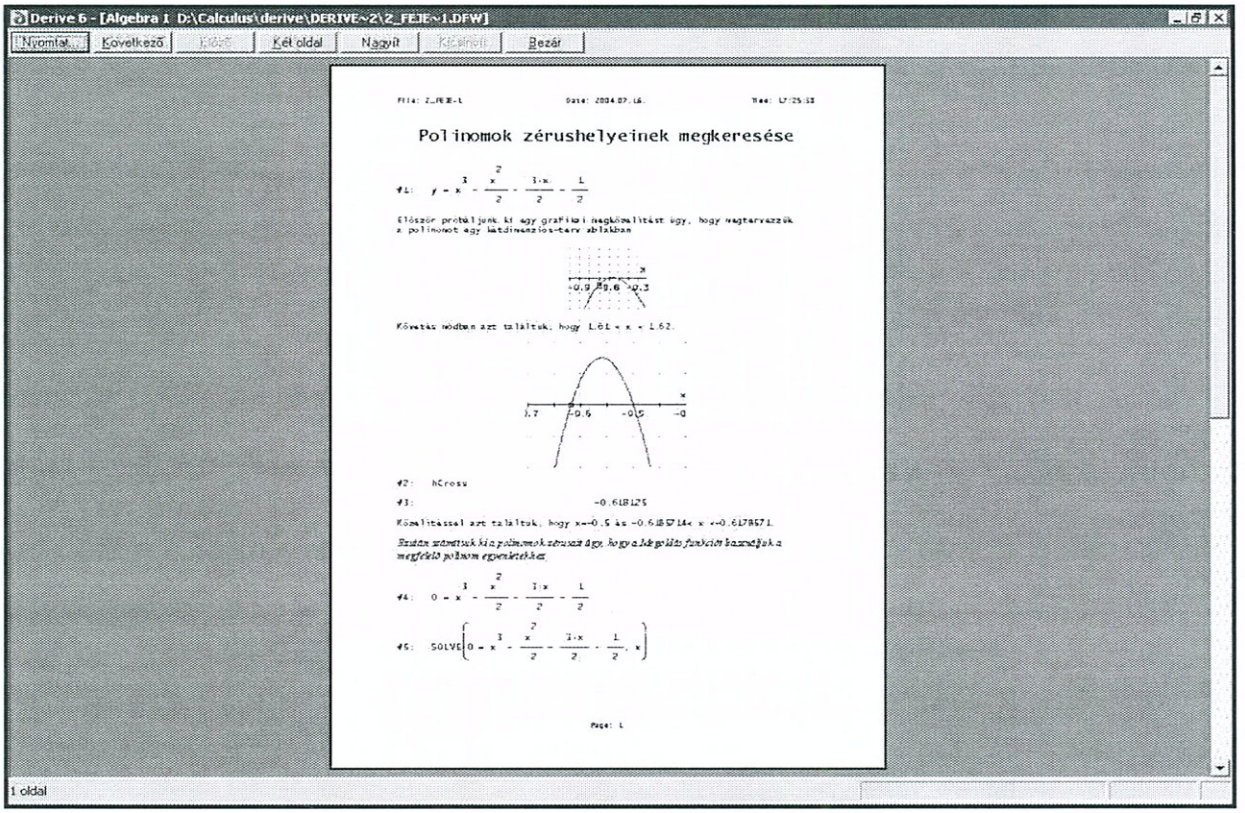
... írjuk át 22-re a betűméretet, vastagítsuk meg a betűket (B) és rendezzük középre ( ) a szöveget, majd adjunk hozzá egy üres vonalat.



Kapcsoljuk ki a **Formátum** Eszköztárat az **Ablak > Testreszabás** paranccsal.

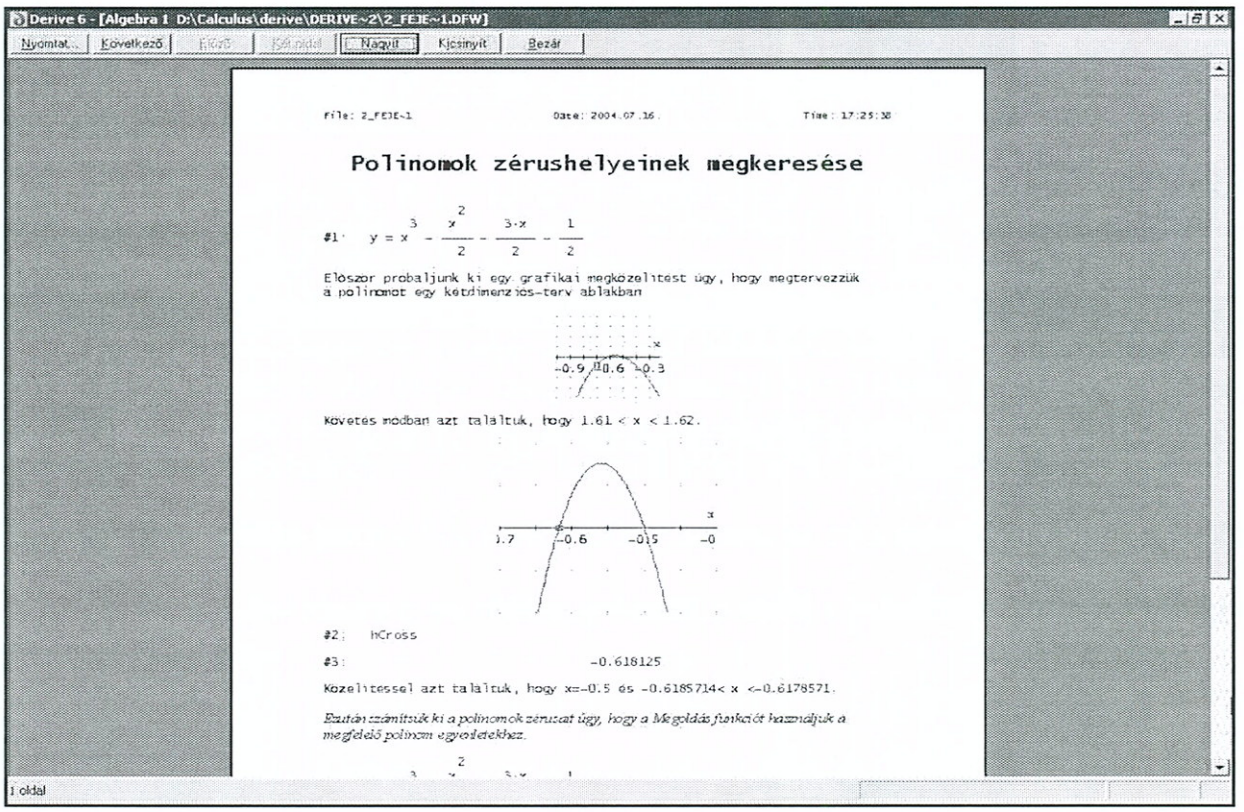
Mielőtt kinyomtatjuk a dokumentumot, nézzük meg a nyomtatási képet.

Nézzük meg a nyomtatási képet a **Fáj l> Nyomtatási kép** paranccsal.



A nyomtatási kép számos opciót tartalmaz, beleértve a közelítést is.

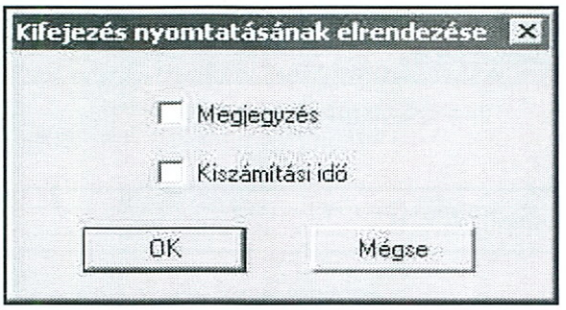
Közelítsünk rá a nyomtatási képre a **Nagyít** gombbal.



A nagyító alakú kurzor a lap jobb felső negyedében található, a nagyításhoz pedig kattintsunk rá.

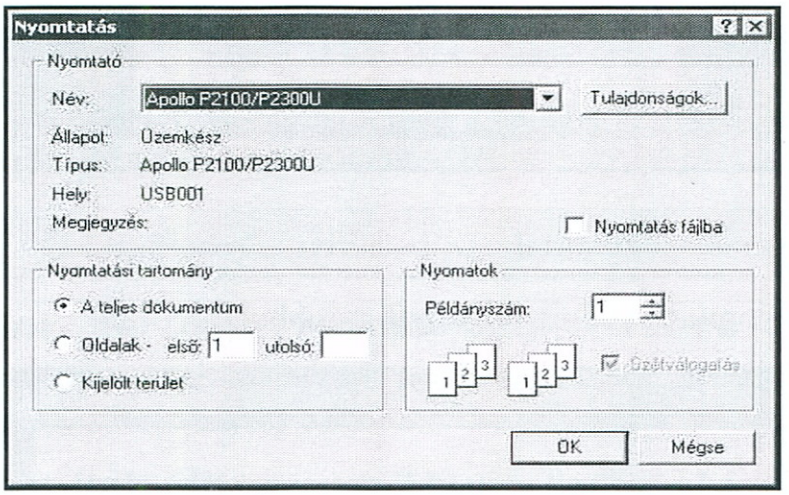
A dokumentum nyomtatáshoz szükséges beállításokat a **Beállítások** > **Nyomtatás** menüpont segítségével lehet megtenni. Például a :

Beállítások > Nyomtatás > Kifejezések elrendezése menüpont a **Megjegyzés**ek és a **Kiszámítási idő** láthatóságát szabályozza.



A munkafelület készen áll a nyomtatásra.

Készítsük elő a dokumentum kinyomtatását úgy, hogy lenyomjuk a nyomtatási kép **Nyomtatás** gombját.

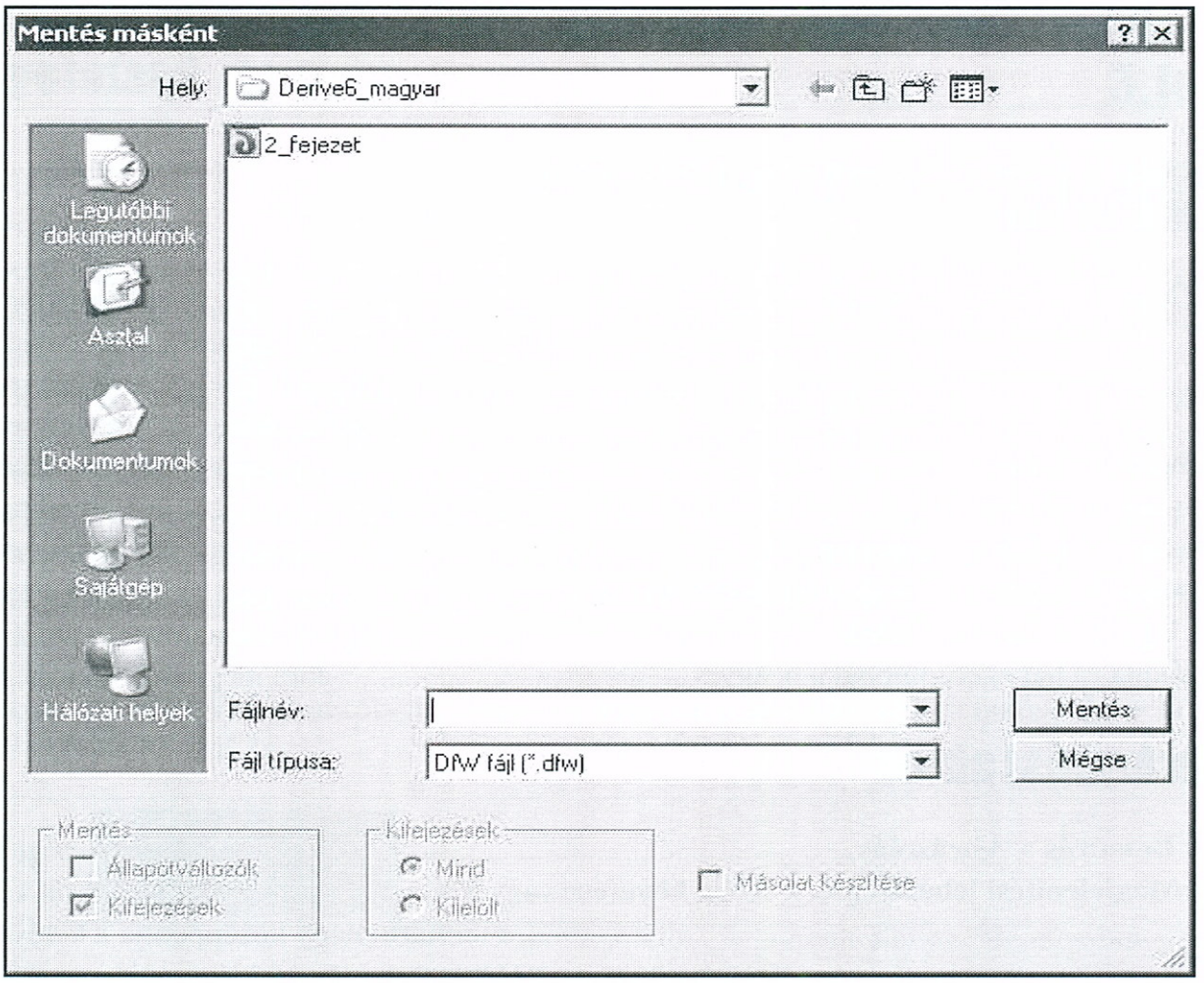


Bizonyosodjunk meg róla, hogy a nyomtató telepítve van, be van kapcsolva, és be van állítva. A **Nyomtatás** párbeszédablakban tudjuk változtatni a nyomtató típusát és tulajdonságait. Változtassuk meg a nyomtatás értékkészletét **Mind**-ről oldalakra vagy kijelölt kifejezésekre, de megváltoztathatjuk a példányszámot is annyira, amennyit nyomtatni szeretnénk. (A párbeszédablak nyelve az operációs rendszertől függ.)

Nyomtassuk ki a dokumentumot az OK gomb lenyomásával.

Mentsük el a munkafelületet arra az esetre, ha később módosítani szeretnénk.

Mentsük el a munkafelületet a **Fájl > Mentés másként** paranccsal.



A **DERIVE** fájlokat érdemes a Matematika alkönyvtárban tárolni. Választhatunk több különböző könyvtárból is úgy, hogy kiválasztjuk a megfelelőt a menüből, amely a **Hely** mezőben található.

Fogadjuk el a javaslatot, és írjuk be a *2.fejezet* nevet a **Fájlnév** mezőbe. Csukjuk be a párbeszédablakot a MENTÉS gombbal.

Vizsgáljuk meg a Címsort. Az előbb még [**Algebra 1**] volt kiírva, most pedig [**Algebra 1 2.fejezet.dfw**] van feltüntetve, jelezve, hogy a munkafelületnek **2.fejezet.dfw** a neve. A **.dfw** kiterjesztés alapértelmezett, akkor is hozzáadódik a fájlnévhez, ha nem írjuk mögé.

Lépjünk ki a **DERIVE**-ból.

Összefoglalás

Algebra ablak

vagy **Megoldás > Kifejezés** vagy CTRL+SHIFT+E ..... egyenlet megoldása
..... 2D-ábrázolás ablak kinyitása vagy bekapcsolása
..... a kijelölt kifejezés jobbra rendezése
..... a kijelölt kifejezés középre rendezése
Fájl > Mentés másként ..... munkafelület mentése névvel
Fájl > Nyomtatási kép ..... nyomtatási kép
Szerkesztés > DERIVE objektum ..... kijelölt kifejezés szerkesztése
Beállítások > Nyomtatás > Kifejezések elrendezése ..... kifejezés elrendezése
Ablak > Új 2D-ábrázolási ablak ..... új kétdimenziós-terv ablak nyitása
Dupla kattintás a bal egérgombbal a beágyazott ábrán ..... ábra megnyitása a tervablakban

2D-ábrázolási ablak

vagy **Beszúrás > Ábrázolás** ..... kijelölt kifejezés megtervezése
vagy **Megjelenítési lehetőségek > Ábra követése** vagy **F3** ..... követési mód kijelölése
..... a tervtartomány középpontja a kereszten van
..... a tervtartomány középpontja az eredetin van
vagy **F9** ..... közelítés
vagy **F10** ..... távolítás
vagy **F7** ..... függőleges közelítés
..... egy négyszög grafikus választása
Fájl > Beágyazás ..... tervablak másolása az algebra munkafelületére
Beállítások > Ábrázolási tartomány ..... a terv értéktartomány határainak beállítása
Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Célkereszt ..... a grafikus keresztmegjelenítése
Beállítások > Célkereszt helyzete ..... követési mód bekacsolása
(→), (↓),(←), (↑) ..... képpont mozgatása a képernyőn
CTRL + →, CTRL + ↓, CTRL + ←, CTRL + ↑ ..... több képpont mozgatása
HOME ..... a célkereszt mozgatása a tervablak középpontjába

Összes ablak

Ablak > Egymás mellett ..... rendezzük el az ablakokat jobb-bal osztásban

3. fejezet

A rész és az egész – részkifejezések

Az egyik legfontosabb az alapvető matematikai képességek között a kifejezések struktúrájának megértése. Ugyanúgy szükséges ahhoz, hogy átfogóan értsük a matematikát, mint ahhoz, hogy képesek legyünk alkalmazni megszerzett matematikai jártasságunkat. Szakmai értelemben ez azt jelenti, hogy valaki érti, hogy egy adott kifejezés hogyan épül fel részkifejezésekből. Erre a jártasságra van szükség az egyenletmegoldások esetén, mivel az egyenletrendezés lehetőségei az egyenlet két oldalán álló kifejezés felépítésétől függ. A **DERIVE**-ban könnyen lehet a részkifejezésekkel dolgozni, ennek lehetőségeit ismerhetjük meg a kiterjesztés, szorzattá alakítás és a behelyettesítés utasításaival egyetemben. Azt is tanulmányozhatjuk, hogyan lehet egyszerre több, mint két ablakkal, illetve munkalappal dolgozni.

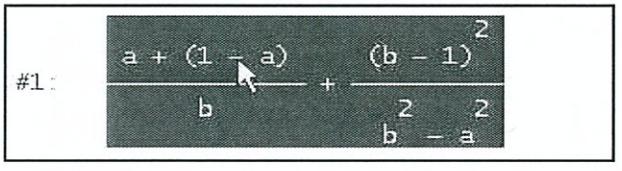
💻 Indítsuk a **DERIVE**-ot alapbeállítással és írjuk be a következő kifejezést: *(a + (1 – a))/b + (b – 1)^2 / (b^2 – a^2).*

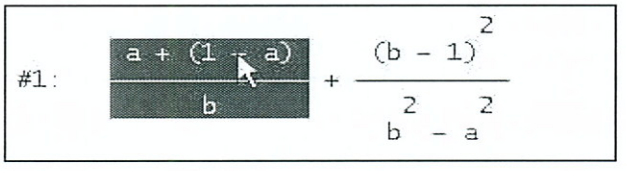
Figyeljük az első részkifejezés számlálójában lévő zárójeleket.

A kifejezés tulajdonképpen $A + B$ összege, ahol $A = \frac{a + (1 - a)}{b}$ és $B = \frac{(b-1)^2}{b^2 - a^2}$. A „legkülső" operátor az, amelyet legutoljára alkalmazunk a kifejezés numerikus argumentumait értékelve. Jelen példánkban a legkülső operátor az összeadásjel, amely A-t és B-t összekapcsolja. A $\frac{a + (1 - a)}{b}$ a $\frac{C}{D}$ formulának megfelelő osztás, $C = a + (1 - a)$ és $D = b$, és így tovább.

Egy részkifejezést kijelölhetünk az egérrel vagy a nyíl billentyűket használva. Egy kijelölt kifejezésben a részkifejezés kerül kijelölésre, ha a bal egérgombot a kívánt részkifejezés felett engedjük fel.

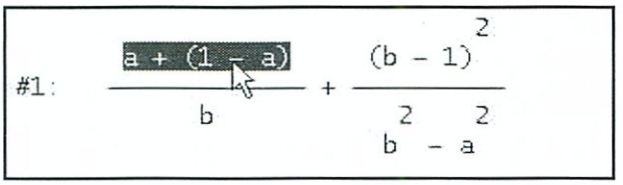
💻 Vigyük az egérkurzort az első részkifejezés számlálójában az a és b közötti mínusz operátorra (bal oldali kép). Kattintsunk a bal egérgombbal.

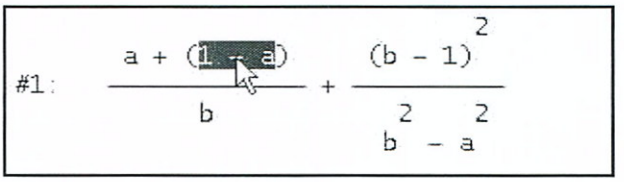




Ezzel a kijelölést a következő alacsonyabb szintre vittük, vagyis az $A + B$ összeadás első részkifejezésére.

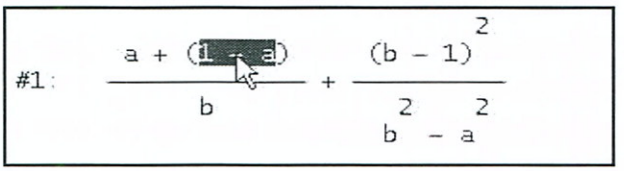
💻 Az egérkurzort továbbra is a mínuszjelen tartva kattintsunk még egyszer (bal oldali kép), majd harmadszor is.





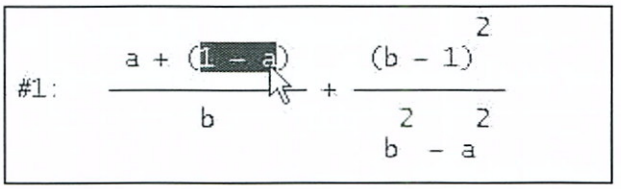
A kijelölést minden egyes kattintással egy szinttel lejjebb vittük a kifejezésen belül, azaz a kifejezés struktúrájában egy szinttel mélyebbre kerültünk abban a részkifejezésben, amelyre az egérkurzor mutatott. Egy adott kifejezés terjedelme a kijelöléskor sötétebben megjelenő négyszögben lévő rész.

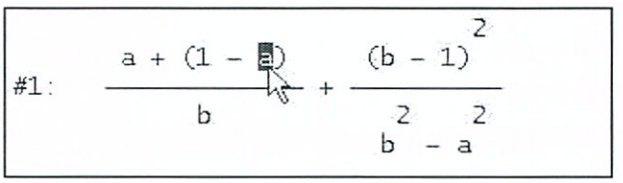
💻 Ha most újra kattintunk, az nem okoz változást …



… mert a kurzor nem mutat a sorban következő részkifejezések közül sem 1-re, sem a-ra.

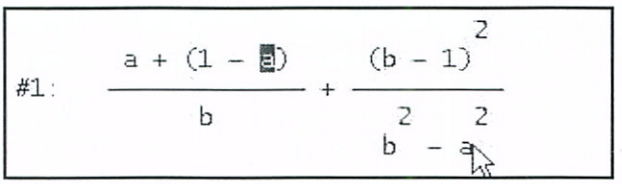
💻 Mozgassuk a kurzort az *a* változó fölé (bal oldali kép), majd kattintsunk a bal egérgombbal.

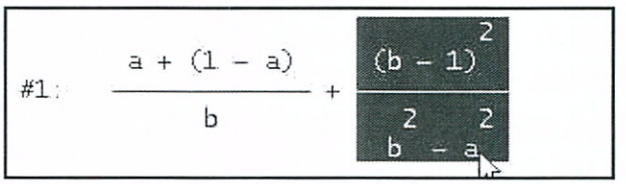


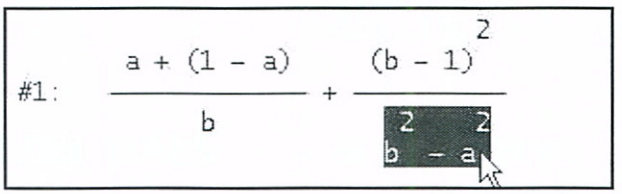


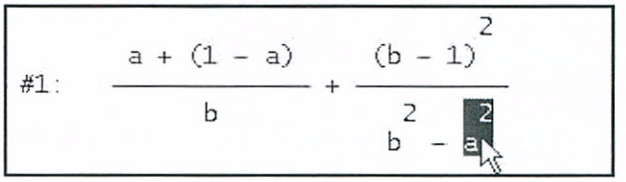
Ha figyeljük, hogy a kifejezés mely része kerül kijelölésre, miközben mozgatjuk az egérkurzort, megtanuljuk, hogyan tudjuk kijelölni egy kifejezés kívánt részkifejezését.

💻 Ha a jobboldali kifejezés nevezőjében az a^2-et szeretnénk kijelölni, vigyük fölé a kurzort és kattintsunk rá többször a bal egérgombbal.



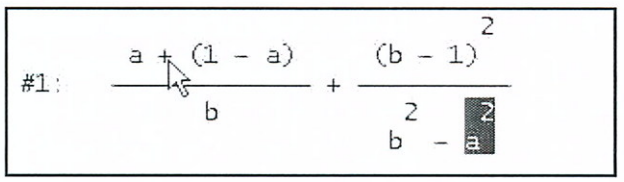
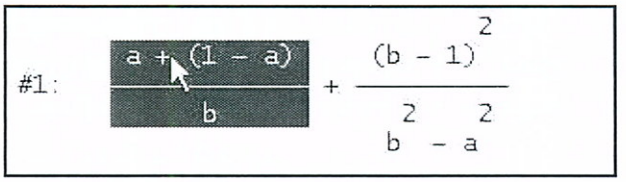
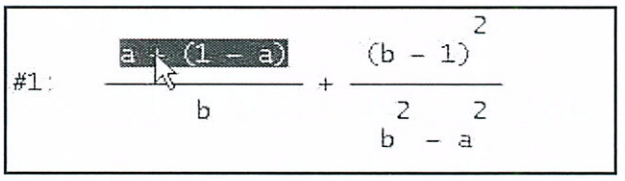






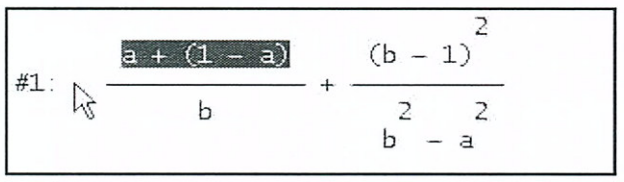
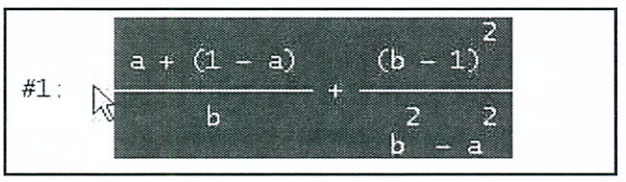
Hogy ezzel a módszerrel jelöljünk ki egy bizonyos részkifejezést, vigyük a kurzort a legalacsonyabb szintű operátora fölé, és addig kattintgassunk a bal egérgombbal, amíg a kívánt kifejezés nem kerül kijelölésre.

💻 Jelöljük ki a bal oldali kifejezés számlálóját: vigyük a kurzort ennek a részkifejezésnek a külső operátorára - a pluszjel fölé, és kezdjünk kattintgatni.

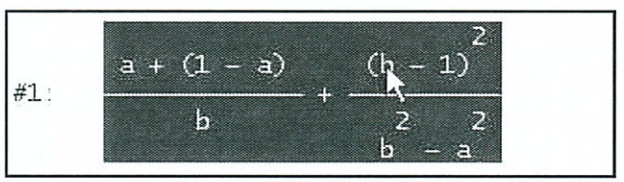
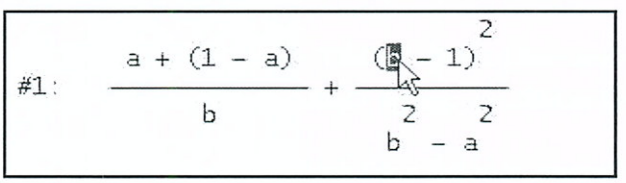
Most jelöljük ki újra a teljes kifejezést. Egyik lehetőségünk erre, hogy a kifejezés legkülső operátorára, a két osztás közötti plusz jelre mutatunk a kurzorral és rákattintunk. Másik megoldás, ha a kifejezés sorába bárhová kattintunk, kivéve a kifejezés által elfoglalt területet magát.

💻 A kifejezés mellett balról kattintva jelöljük ki azt.

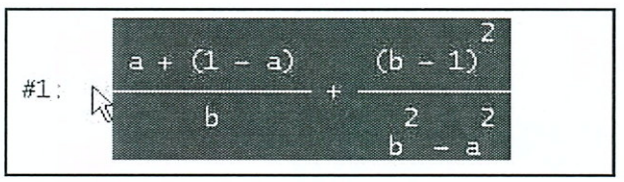
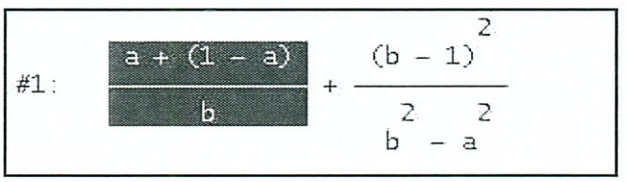
Abban az esetben, ha duplán kattintunk (vagyis gyors egymásutánban kétszer) a fenti gyakorlat során, az adott részkifejezés azonnal kijelölésre kerül. Ez az úgynevezett dupla kattintás metódusa. Használhatjuk, ha a kurzorral kiválasztott legkisebb részkifejezéshez gyorsan kívánunk eljutni.

💻 Jelöljük ki a b változót a jobb oldali kifejezés számlálójában. Vigyük a kurzort fölé és a bal egérgombbal kattintsunk duplán. (A két kattintás között nagyon rövid időnek szabad eltelnie.)

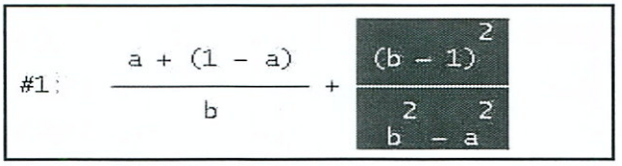
Van egy másik lehetőségünk a részkifejezések kijelölésére. Használhatjuk a nyíl billentyűket együtt a SHIFT billentyűvel ⇧.

💻 Jelöljük ki a teljes kifejezést (bal oldali kép), majd használjuk a SHIFT+↓ billentyűkombinációt.

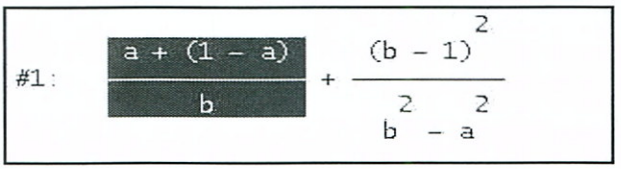



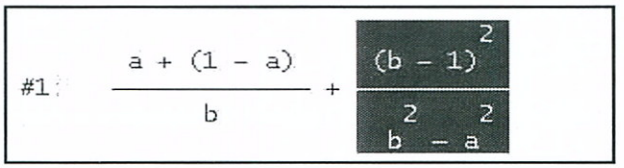
Az $\dfrac{a+(1-a)}{b}$ részkifejezés került kijelölésre. A SHIFT + ↓ billentyűkombinációval a kifejezés hierarchiájában egy szinttel lejjebb „ereszkedhetünk".

A SHIFT + → és SHIFT + ← billentyűkombinációkat a szomszédos részkifejezések közötti mozgatásra használhatjuk, mint például az összeadás másik tagjára, vagy a szorzás másik tényezőjére való átlépésre. Alkalmazzuk a SHIFT + → kombinációt.

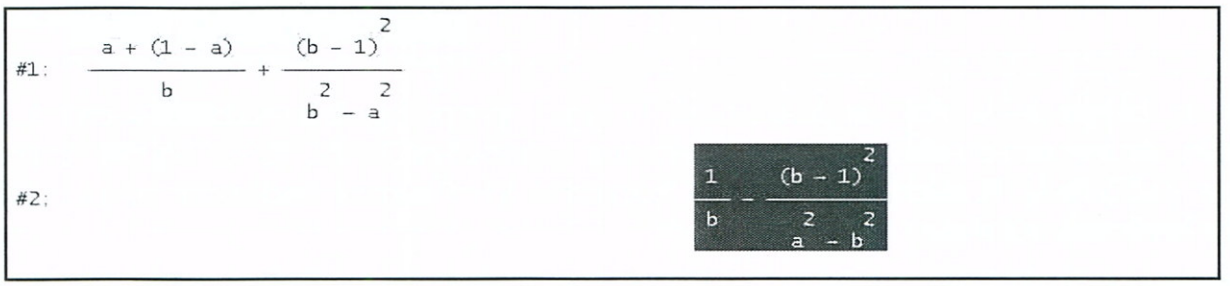


Nyomjuk le a SHIFT + ←, a SHIFT + →, a SHIFT + ←, SHIFT + → kombinációkat, hogy lássuk, hogyan váltogathatjuk a kijelölést az összeadás bal és jobb oldali tagja között. Álljunk meg úgy, hogy a jobb oldali tag legyen kijelölve.





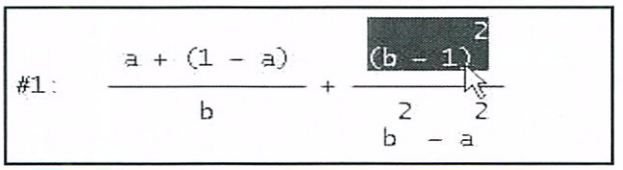
Ismét jelöljük ki az egész kifejezést, majd egyszerűsítsük a [=] gombbal.



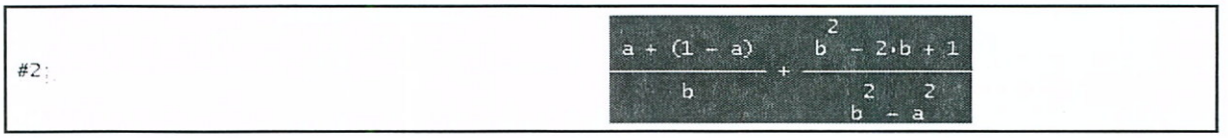
Az egyszerűsítés segítségével kiküszöbölhetjük az ismétlődő zárójeleket, csokorba gyűjthetjük az azonos tagokat, a kifejezést egyszerűbb alakban írhatjuk fel. Egyszerre viszont csak egy részkifejezéssel végezhetünk műveletet.

Használjuk a SHIFT + ↓ gombokat, hogy az eggyel alacsonyabb szintű részkifejezést jelölhessük ki, jelen esetben a valóságos tört számlálóját. Üssük le a SHIFT + ↓ billentyűket.

Terjesszük ki a #1 kifejezés második tagjának számlálóját. Jelöljük ki, ...



...és terjesszük ki az **Egyszerűsítés > Kibővít** utasítást használva az argumentumokat alapértéken hagyva.

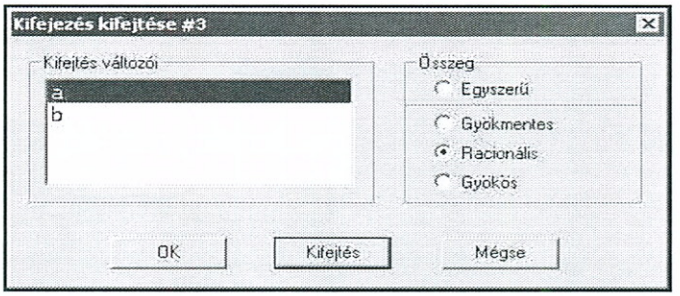


Az eredmény egy másolat a #1 kifejezésről úgy, hogy a kijelölt részkifejezés változott, a többi tag változatlan maradt.

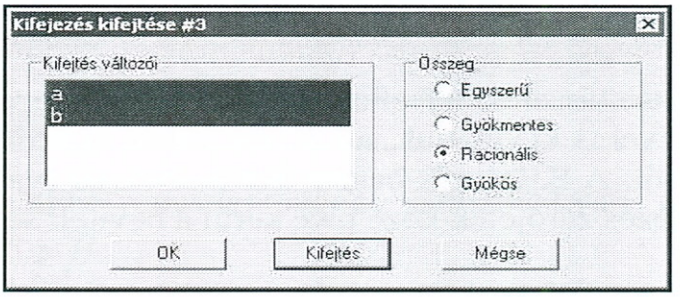
A részkifejezésekkel történő munka lehetővé teszi, hogy számításainkat lépésenként végezzük. Ezzel a módszerrel sokszor találkozunk majd ebben a kézikönyvben.

Tekintsük át részletesebben a kiterjesztést. Az **Egyszerűsítés > Kibővít** parancs megnyit egy párbeszédablakot, melyben meg kell adnunk a kiterjesztés változóit. Itt az összes, a kijelölésben előforduló változó fel van sorolva, a **DERIVE**-ban használt sorrendben. (*x* előbb következik, mint *y*, amely megelőzi a *z*-t. Ez után következik az összes többi, abc sorrendben. Használhatunk egyéni beállítást is a **Beállítások > Beállítások** : **Kimeneti beállítások** segítségével.)

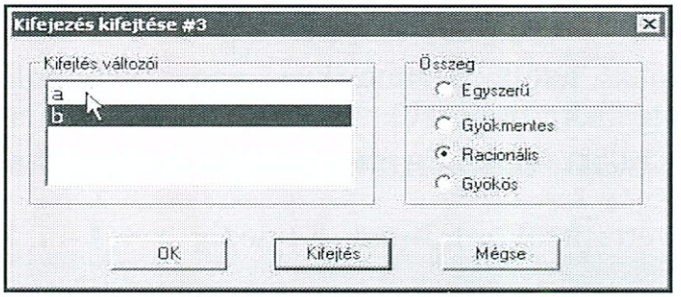
💻 Terjesszük ki #3-at *b*-re. Indítsuk a **Egyszerűsítés > Kibővít** utasítást, ...



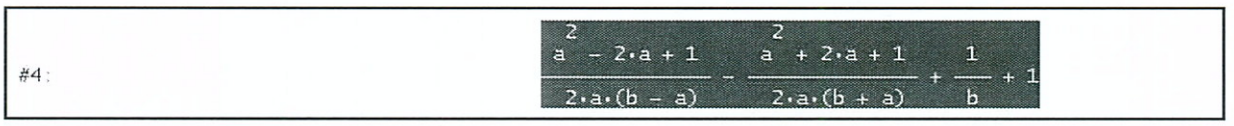
💻 ... rákattintva válasszuk ki *b*-t, ...



💻 ... szüntessük meg *a* kiválasztását a sorába kattintva, ...

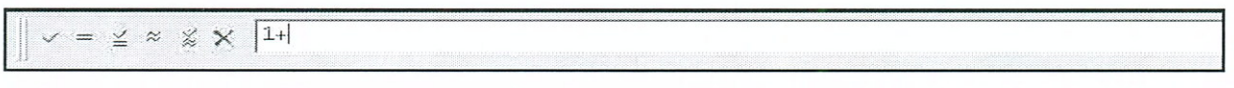


💻 ... majd lépjünk ki a **Kifejtés** gombbal.



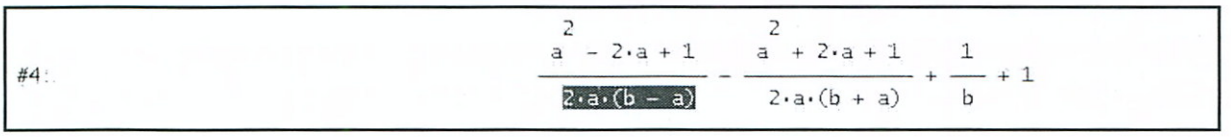
A részkifejezéses technikával már meglévő kifejezésekből újakat szerkeszthetünk. Példaként az $1+2a(b-a)$ kifejezés beírásához kövessük az alábbi lépéseket.

💻 Használjuk a **Kifejezés beírása** gombot, és írjuk be az első részt: *1+*

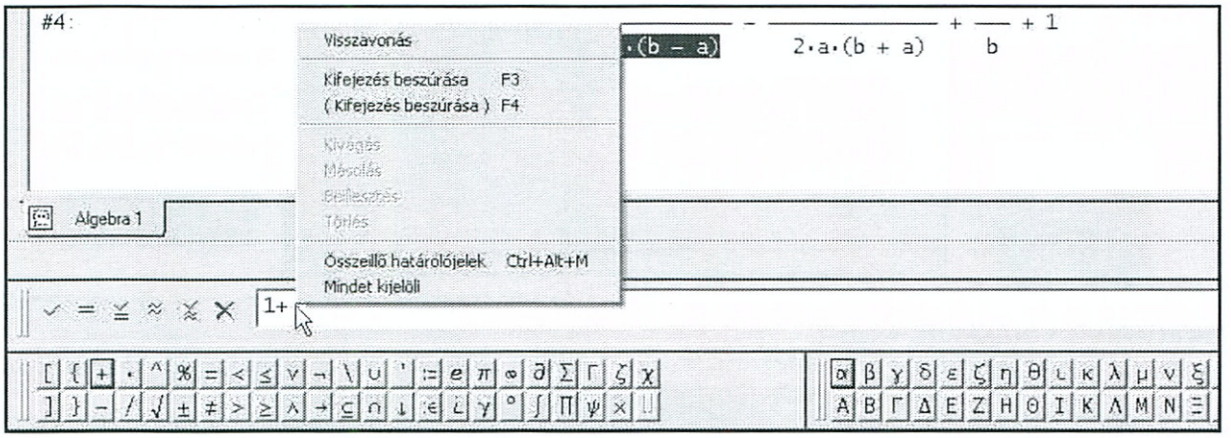


A következő rész, a $2a(b-a)$ már létezik a #4 kifejezés nevezőjében. Bemásolhatjuk a beviteli sorba.

Készüljünk elő a beillesztésre: jelöljük ki a $2a(b-a)$ -t a #4 első tagjában.



Készítsük elő a részkifejezés beillesztésére a beviteli sorba. Mozgassuk az egérkurzort a beviteli sorba és kattintsunk a jobb egérgombra, hogy a választható utasítások menüjét megnyissuk.

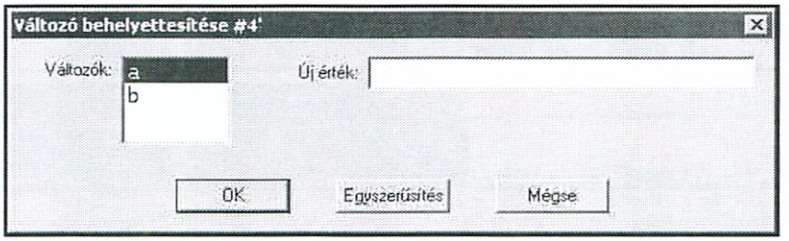


A **Kifejezés beszúrása** utasítással bemásolhatjuk a kijelölt kifejezést a beviteli sorba. Ezt a parancsot az **F3** billentyűvel is kiadhatjuk, amint azt látjuk az **Kifejezés beszúrása** mellett jobbra látható **F3** utalásból. A **Kifejezés beszúrása** utasítással (vagy az **F4**-gyel) a kijelölt utasítással a kijelölt kifejezés zárójelek közé téve kerül a beviteli sorba.

Írjuk be a $2a(b-a)$ -t a **Kifejezés beszúrása** menüpontra kattintva.

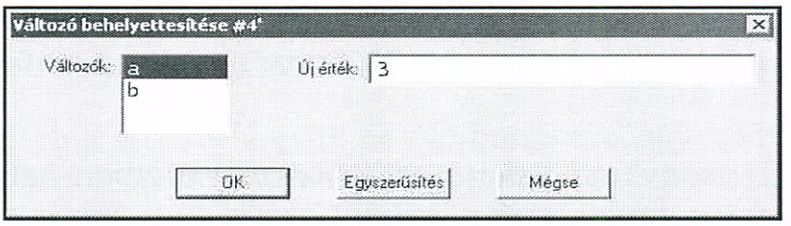
Egy kifejezés változóinak adott, (numerikus vagy szimbolikus) kifejezéssel való kicserélését behelyettesítésnek nevezzük. Végrehajtásához használhatjuk a **Változó behelyettesítése** gombot [Sub], illetve az **Egyszerűsítés > Változó behelyettesítése** utasítást.

A #5 kifejezésben helyettesítsük a-t 3-mal, b-t pedig $x+1$ -el. Indítsuk a behelyettesítés utasítást a [Sub] gombbal.



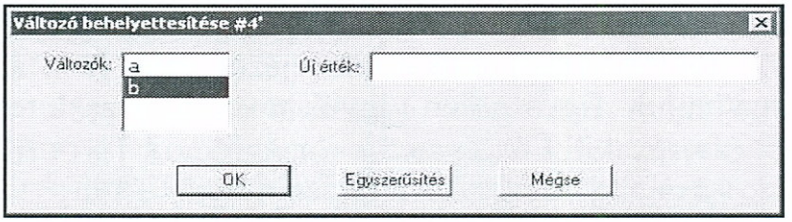
A **Változó behelyettesítése** dialógusablak **Változók** mezőjében a ki van jelölve és a kurzor az **Új érték** mezőben villog. Ez jelzi, hogy a **DERIVE** várja, hogy a új értékét beírjuk.

Írjuk be a 3-at a behelyettesítéseként az **Új érték** mezőbe.

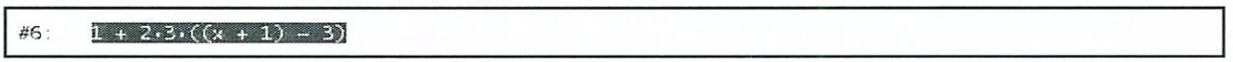


Ha y helyébe nem akarunk behelyettesíteni semmit, ne írjunk semmit az **Új érték** mezőbe.

Készítsük elő b behelyettesítését: Jelöljük ki b-t a **Változók** mezőben rákattintva a sorára.

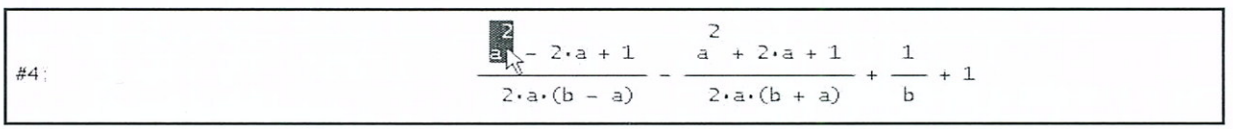


Írjuk az új értéket, $x+1$-t az **Új érték** mezőbe. (Mielőtt begépelnénk az új kifejezést, az **Új érték** beviteli mezőbe kell kattintanunk.) Zárjuk le az OK gombbal.

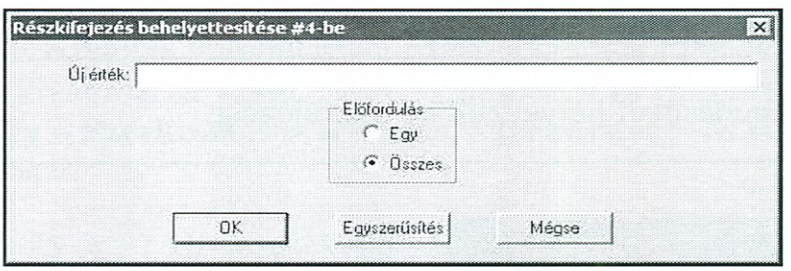


Néha egy *részkifejezést* kell helyettesítenünk egy változóval vagy egy másik kifejezéssel. A #4-ben helyettesítsük a^2-t β-val:

Jelöljük ki az első tag nevezőjét a #4-ben.



Helyettesítsük ezt a részkifejezést az **Egyszerűsítés > Részkifejezés behelyettesítése** utasítás segítségével.



A **DERIVE** felkínálja a lehetőséget, hogy a kiválasztott részkifejezés helyére új kifejezést írhassunk. A párbeszédablakban dönthetünk arról is, hogy csak a kijelölt egyetlen (**Egy**) kifejezést akarjuk helyettesíteni, vagy az összes (**Összes**) előfordulót. Az alapbeállítás az **Összes**.

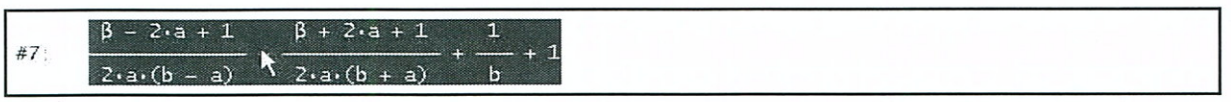
Írjuk be a β-t a görög abc eszközsorból, majd lépjünk ki az OK-val.

Az #7 új kifejezéshez a következő megjegyzés olvasható: *Behelyettesít(#4')*. Az aposztróf a #4 kifejezés címkéje után arra utal, hogy a #5 kifejezés egyik részkifejezése helyettesítésre került.

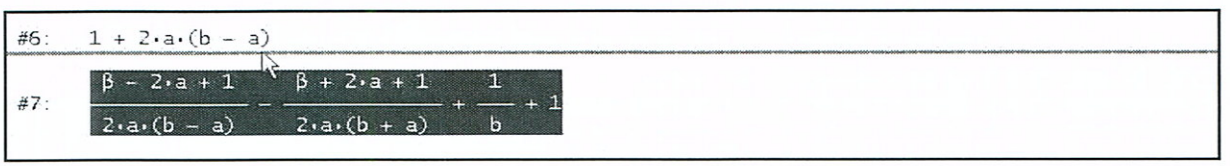
Megfigyelhetjük azt is, hogy mindkét (azaz az összes) esetben helyettesítésre került az $x^2 - y^2$ kifejezés. De nem került helyettesítésre a négyzetgyöke, az a. Az **Egyszerűsítés > Részkifejezés behelyettesítése** utasítás tisztán egy szintaktikai keresést és helyettesítést hajt végre. Ha ez utóbbi kifejezésben is végre akarjuk hajtani a helyettesítést, az a-et $\sqrt{\beta}$-val kellene helyettesítenünk.

Az a sorrend, amelyben a kifejezéseket beírjuk, eltérhet attól a sorrendtől, amelyet a munkalapunkon látni szeretnénk. A munkalapon könnyedén mozgathatjuk az objektumokat. Ha a kijelölt objektum nem részkifejezés vagy nem áll szerkesztés alatt, a bal egérgombbal mozgathatjuk. Egyszerűen vigyük a vastag vízszintes áthelyező vonalat a kívánt új helyre.

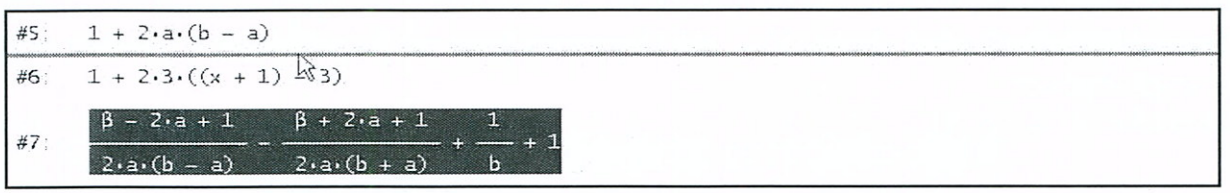
💻 Vigyük a kijelölt #7 kifejezést a #6 elé a következőképpen. Vigyük az egérkurzort a kijelölt kifejezés fölé.



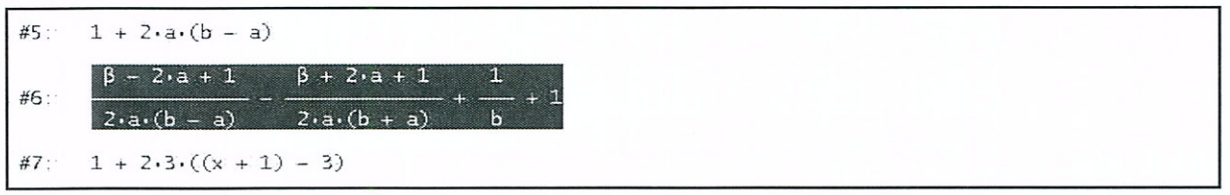
💻 Nyomjuk le és tartsuk lenyomva a bal egérgombot, és az egérrel mozgassuk a vastag vízszintes vonalat a #6 felé.



💻 Húzzuk a vonalat a #5 és #6 közé.



💻 Az egérgomb felengedésével helyezzük be a kifejezést.

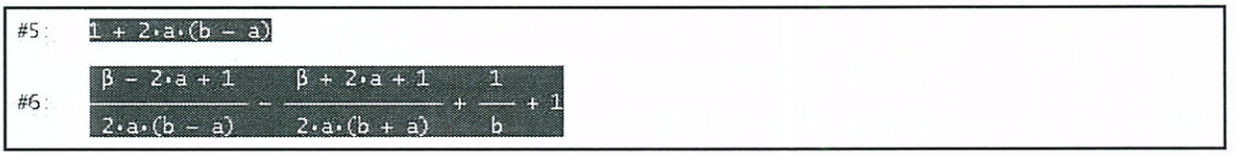


Figyeljük meg, hogy automatikusan megtörténik az újraszámozás, tehát a korábbi #7-ből #6 lesz és így tovább. Néha szeretnénk, ha ez az automatikus számozás nem működne, például, ha a kifejezések között szöveges megjegyzéseket helyezünk el, a kifejezésekre történő hivatkozásokkal.

💻 A **Beállítások > Megjelenítés** menü megnyitásával kapcsoljuk ezt az automatikus újraszámozást ki, kattintsunk a **Kifejezések újraszámozása** utasításra.

Számos módja van annak, hogy kijelöljünk több, egymás melletti kifejezést. Ezek közül az egyik használható nem szomszédos kifejezések kijelölésére is.

💻 A #5 és #6 kijelöléséhez először vigyük az egérkurzort az egyik kifejezés, mondjuk a #5 fölé. Nyomjuk le és tartsuk nyomva a bal egérgombot, közben mozgassuk a kurzort a #6 fölé. (Ez úgy hangzik, mint amikor egy kifejezést át akartunk helyezni. A különbség az, hogy akkor a kurzort egy már kijelölt kifejezés fölé kell vinnünk és akkor kattintanunk és a gombot lenyomva tartva mozgatnunk az objektumot, míg itt egy kijelöletlen kifejezésre kattintva kezdjük a műveletet.)

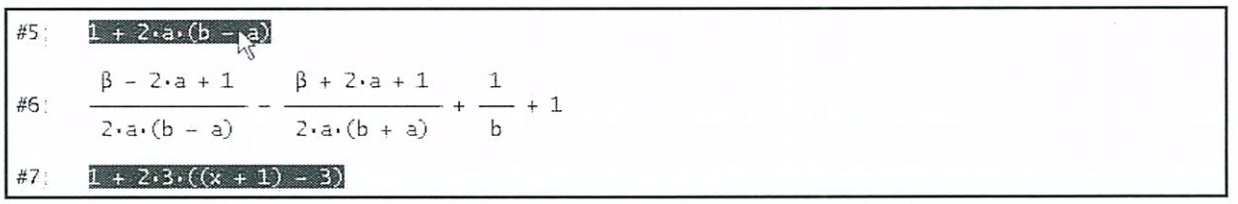


Másik megoldásként először kijelölünk egy kifejezést, majd egyszer vagy többször használjuk a CTRL+SHIFT+↑ kombinációt a megelőző kifejezés(ek) kijelölésére. Ugyanígy használhatjuk a CTRL+SHIFT+↓ kombinációt a következő kifejezés(ek) kijelölésére.

Természetesen kijelölhetünk egyszerre több mint, két kifejezést is, és mozgathatjuk őket egyszerre.

Van még egy módszer több szomszédos kifejezés kijelölésére. A CTRL billentyűt lenyomva tartva egyenként kattinthatunk a kifejezésekre. Ezt a fajta kijelölést használhatjuk a nem szomszédos kifejezések kijelölésekor is.

💻 A jelenleg nem szomszédos #7 és #5 kifejezéseket jelöljük ki. Jelöljük ki először a #7-et, majd a CTRL billentyűt lenyomva tartva kattintsunk a #5-re.



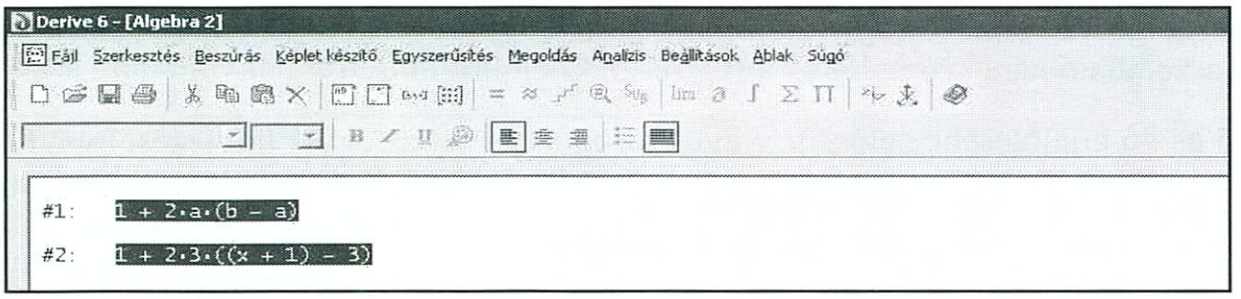
Tudnunk kell, hogy a nem-egymásmelletti objektumok csoportosan nem mozgathatók.

A **DERIVE**-ban használhatjuk a szokásos kivágás, másolás és beillesztés műveleteket. Használhatjuk hozzá a **Kivágás** gombot, a **Másolás** gombot és a **Beillesztés** gombot, a CTRL + X (kivágás), a CTRL + C (másolás) és a CTRL + V (beillesztés) gyorsbillentyűket, vagy a **Szerkesztés > Kivágás, Szerkesztés > Másolás** és a **Szerkesztés > Beillesztés** utasításokat.

💻 Másoljuk a kijelölt #5 és #7 kifejezéseket a vágóasztalra.

💻 Nyissunk egy új munkalapot az **Új** gomb használatával, vagy a **Fájl > Új munkalap** utasítással.

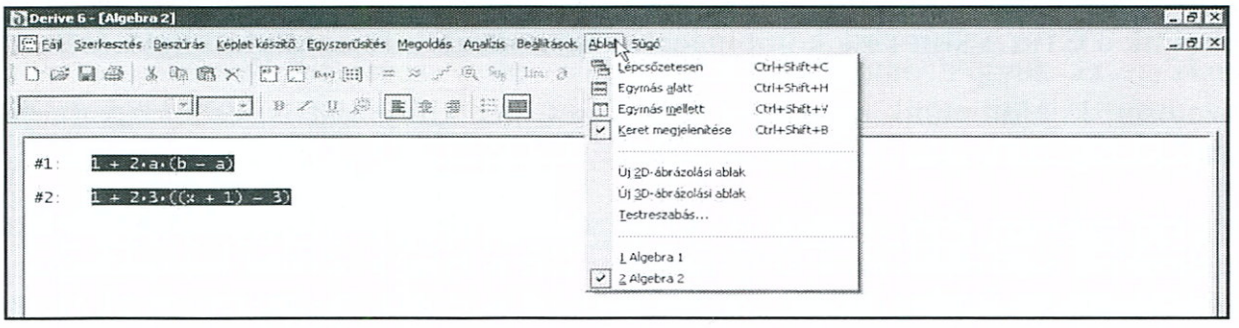
💻 Illesszük be a vágólap tartalmát az üres munkalapra, a **Beillesztés** gombra kattintva.



A címsorban az **[Algebra 2]** felirat mutatja, hogy pillanatnyilag a második (névtelen) munkalapot használjuk.

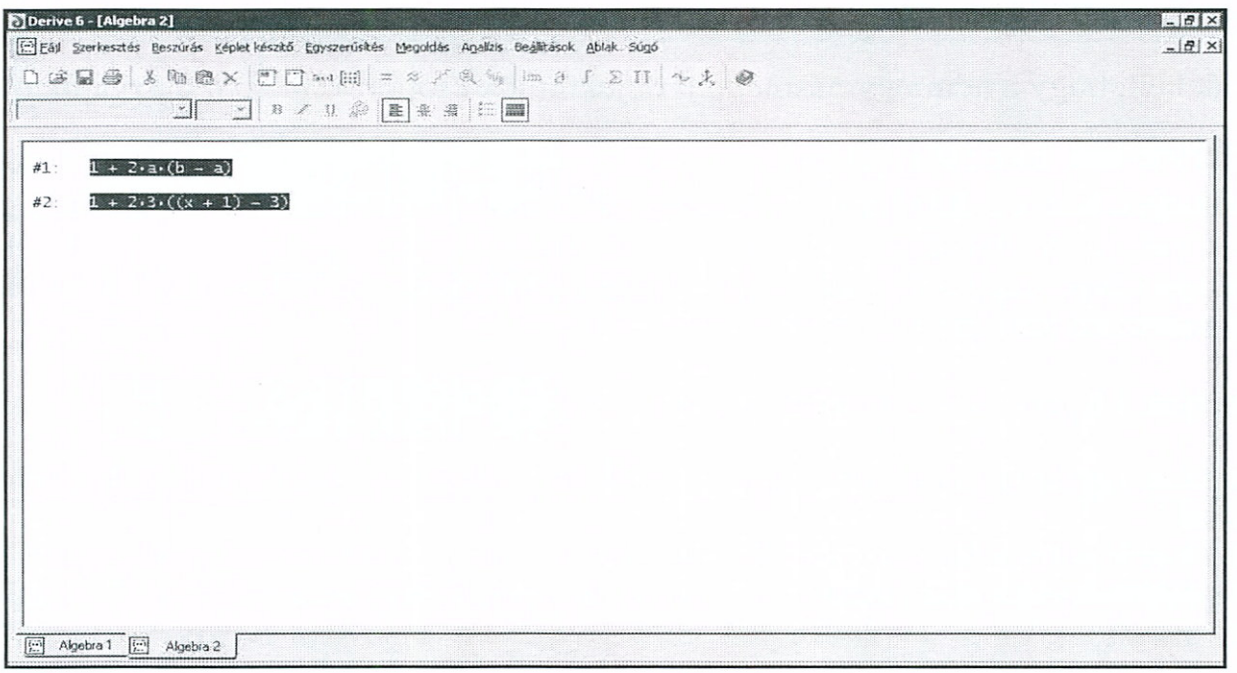
Sokféleképpen válthatunk át munkalapok és ablakok között. Egyik lehetőség a **WINDOWS**-ban az **Ablak** menüben található.

💻 Nyissuk meg az **Ablak** menüt.



Az Ablak menüsor legalján láthatjuk az összes elérhető ablakot. A jel a **2 Algebra 2** bal oldalán jelzi, hogy ez az ablak aktív. Nagyon hasznos lehetőséget nyújt a tabulátorok használata, amelyet az **Ablak** menüben a **Keret megjelenítése** utasítással kapcsolhatunk be.

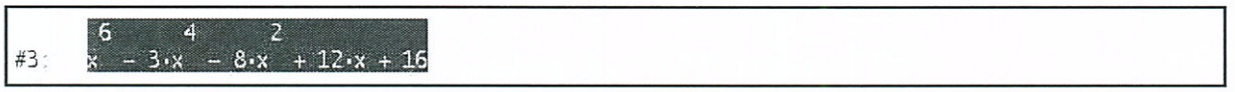
💻 Kapcsoljuk be a tabulátorokat az **Ablak > Keret megjelenítése** utasítással.



Így most könnyen követhetjük, hogy mely ablakok állnak rendelkezésünkre, és beléphetünk akármelyikbe, ha a tabulátorára kattintunk. Vegyünk még egy munkalapot, nyissuk meg azt, amelyet az előző fejezet kapcsán készítettünk és elmentettünk a végén.

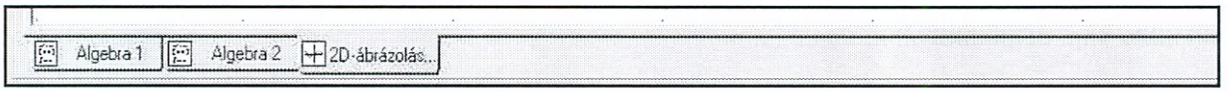
Írjuk be a $p(x) = x^6 - 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 12x + 16$ polinomot. A **DERIVE** lehetővé tesz bizonyos lazább formát is, tehát beírhatjuk a kifejezést a $p(x) =$ nélkül is. Jobb is, ha a **DERIVE**-ban így tesszük, mert különben bizonyos műveletek végrehajtása kevésbé lesz kényelmes.

Írjuk be az $x^6 - 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 12x + 16$ kifejezést, mint a $p(x)$ polinom algebrai megfelelőjét.



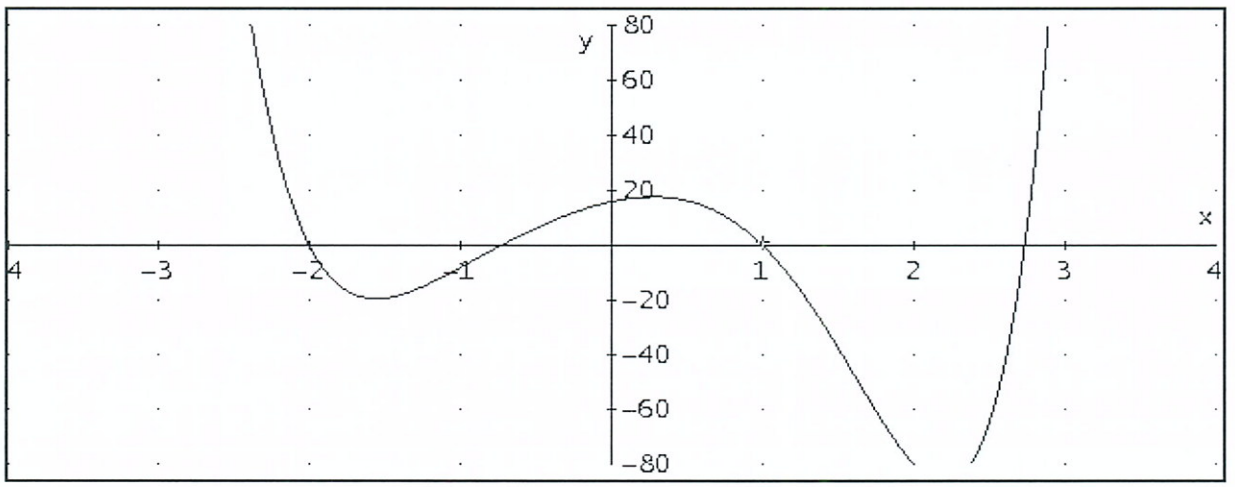
Készítsünk grafikai megjelenítést a polinomról.

Nyissunk egy **2D-ábrázolás ablak**ot a -val.



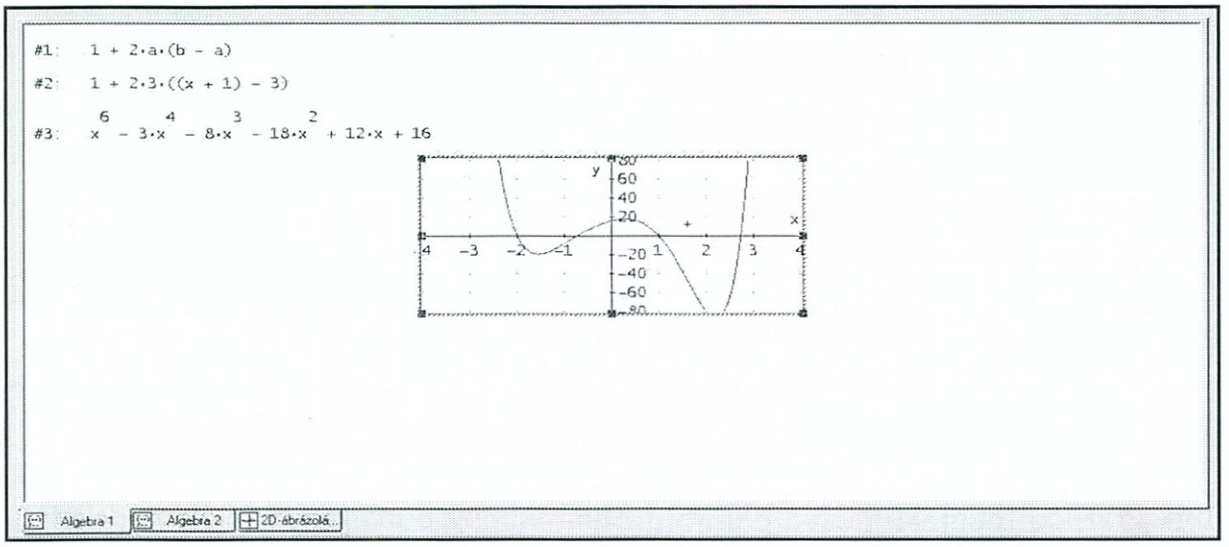
A **2:1** jelzés a **2D-ábrázolás 2:1** tabulátorban azt jelzi, hogy ez az **Algebra 2** ablak első számú 2D-ábrázolás ablaka.

Rajzoljuk meg a polinom ábráját a **Kifejezés ábrázolása** gomb segítségével. Készítsünk egy tanulmányozható ábrát: ennek érdekében nyissuk a képet függőlegesen, négyszer a **Távolítás függőlegesen** gombra kattintva.



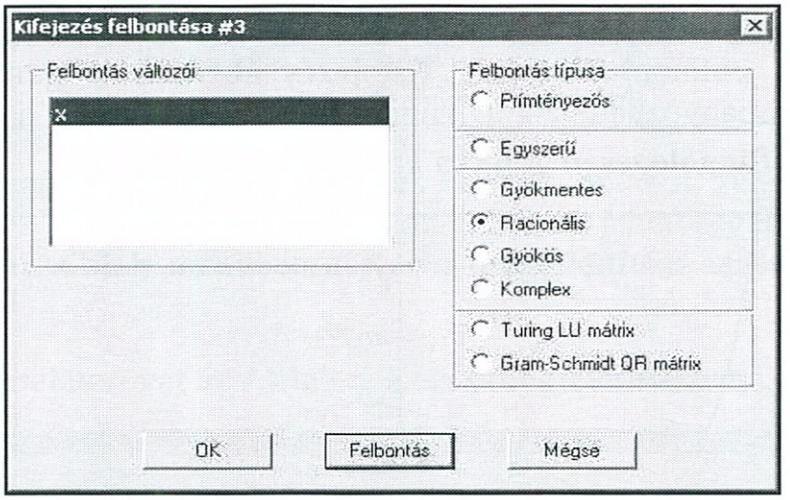
Másoljuk át az ábrát az **Algebra 2** munkalapra a **Fájl > Beágyazás** utasítással.

Zárjuk be a **2D-ábrázolás 2:1** ablakot a gombra kattintva.



Fejezzük be ezt a fejezetet a polinom szorzattá alakításával. A **Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás** utasítás hatására megpróbálja a program a kifejezést vele egyenértékű szorzatokká, *tényezőkké* alakítani.

💻 Alakítsuk a #3 kifejezést szorzattá úgy, hogy először kijelöljük, majd az **Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás** utasítást alkalmazzuk.

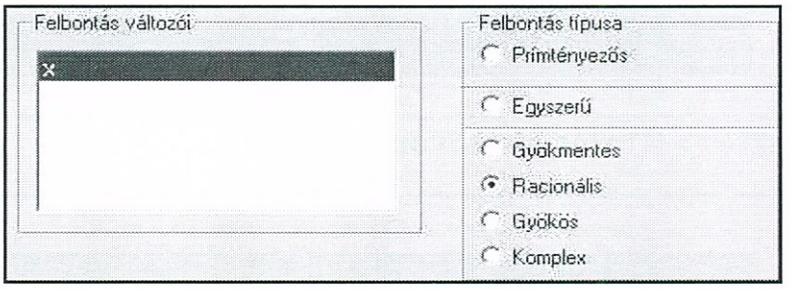


Ennek az ablaknak a dialógusablaka hasonlít az **Egyszerűsítés > Kibővít** utasítás ablakára. A szorzattá alakítás változóit és a szorzattá alakítás mértékét (szintjét) kell megadnunk. Alapértelmezés szerint a tényezőkre bontás csak racionális számokból álló koefficienseket eredményez (nem vezet be új gyökös, illetve irracionális számokat).

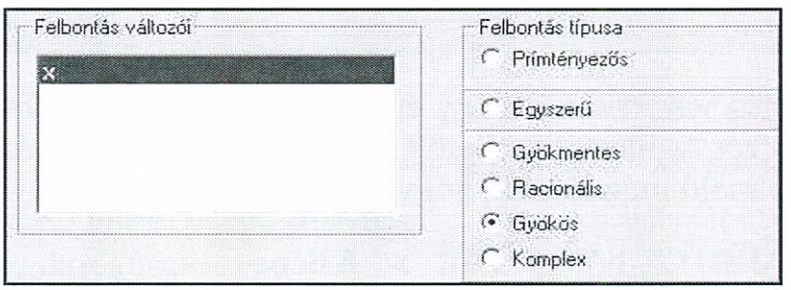
💻 Alakítsuk racionális tényezőkké a kijelölt kifejezést, a **Felbontás** gombot választva.

Próbáljuk ki a szorzattá alakításnak egy másik szintjét.

💻 Hajtsuk végre a szorzattá alakítást a következő szinten, engedjük meg a gyökös tényezőket, vagyis gyököket és más racionális hatványokat tartalmazó koefficienseket is: Adjuk ki ismét az **Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás** utasítást, ...



...kapcsoljuk be a **Gyökös** rádiógombot...



... végezzük el műveletet a **Felbontás** paranccsal.

$$\#5: \quad (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+\sqrt{3}-1)\cdot(x-\sqrt{3}-1)\cdot(x^2+x+4)$$

Végezetül alakítsuk ismét szorzattá a kifejezést, ezúttal megengedve a képzetes tényezőket is.

Indítsuk a komplex tényezőkre bontást az **Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás** utasítással, kattintsunk a **Komplex** gombra és fejezzük be a **Felbontás** utasítással.

$$\#6: \quad (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+\sqrt{3}-1)\cdot(x-\sqrt{3}-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}\cdot i}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}\cdot i}{2}\right)$$

További két szinten végezhetjük el a tényezőkre bontást. Ezek közül egyik az **Egyszerű** arra szolgál, hogy a kifejezést közös nevezőre hozzuk. Próbáljuk ki ezt a #6 kifejezés utolsó szorzótényezőjével.

Jelöljük ki az utolsó tényezőt a részkifejezések kijelölésének eddig megismert valamelyik módszerével.

$$\#6: \quad (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+\sqrt{3}-1)\cdot(x-\sqrt{3}-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}\cdot i}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}\cdot i}{2}\right)$$

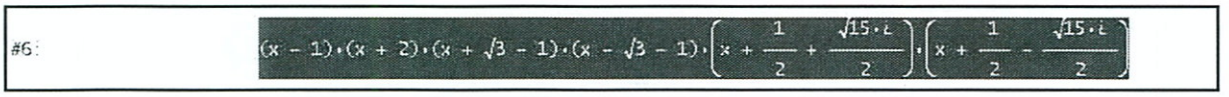
Hozzuk közös nevezőre a részkifejezést az **Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás** utasítással úgy, hogy az **Egyszerű** pontot jelöljük ki.

$$\#7: \quad (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+\sqrt{3}-1)\cdot(x-\sqrt{3}-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}\cdot i}{2}\right)\cdot\frac{2\cdot x+1-\sqrt{15}\cdot i}{2}$$

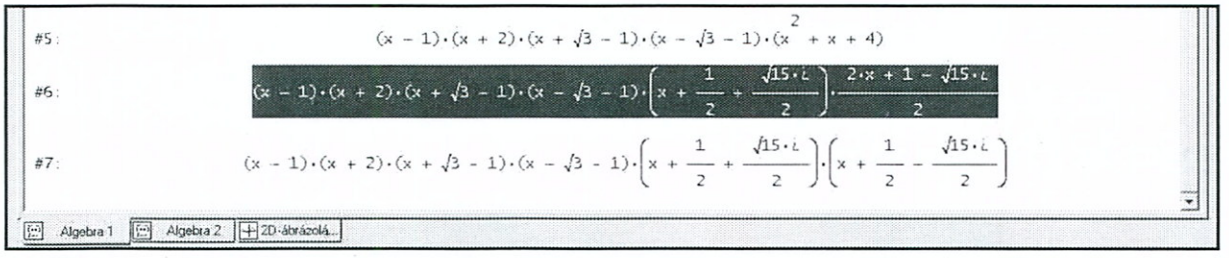
Kapcsoljuk ki a tabulátorokat az **Ablak > Keret megjelenítése** utasítással.

Mielőtt zárnánk ezt a fejezetet, nézzük meg mit tehetünk, ha egy kifejezést töröltünk.

Töröljük a #7 kifejezést a DEL billentyűvel, az **Objektum törlése** gombbal ☒, vagy a **Szerkesztés > Törlés** utasítással.



Adjuk ki a **Szerkesztés > Törlés visszavonása** utasítást.



A **Szerkesztés > Törlés visszavonása** egy egyszintű parancs, amely beilleszti az előzőleg törölt kifejezést, kifejezés csoportot a kijelölt kifejezés elé, következésképpen ez érintheti a sorszámozást. Később majd megnézzük, hogyan lehet a dokumentum végére beilleszteni.

Lépjünk ki a **DERIVE**-ból a **Fájl > Kilépés** utasítással. Ezúttal kétszer kell megerősítenünk, hogy nem kívánunk menteni, konkrétan az **Algebra 1** és az **Algebra 2** munkalapok esetében.

Összefoglalás

Algebra ablak

vagy **Fájl > Új munkalap** ..... új munkalap létrehozása

vagy **Fájl > Megnyitás** ..... létező munkalap megnyitása

vagy **Szerkesztés > Kivágás** ..... kijelölt objektum áthelyezése vágólapra

vagy **Szerkesztés > Másolás** ..... kijelölt objektum vágólapra másolása

vagy **Szerkesztés > Beillesztés** ..... vágólap tartalmának beillesztése a kijelölt objektum elé

vagy **Egyszerűsítés > Változó behelyettesítése** ..... változó behelyettesítése a kijelölt kifejezésbe

Szerkesztés > Törlés visszavonása ..... előzőleg törölt objektumok visszaállítása

Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás ..... tényezőkre bontja a kijelölt kifejezést

Egyszerűsítés > Részkifejezések behelyettesítése ..... kijelölt részkifejezések behelyettesítése

Meghatározások > Kimeneti beállítások ..... kifejezés kimenetelének beállításai

Beállítások > Kifejezések újraszámozása .... automatikus újraszámozás kifejezések újrarendezésekor

Ablak > Keret megjelenítése ..... keret megjelenítése az aktív ablakban

kattintás kijelölt kifejezésre ..... részkifejezés kijelölése

dupla kattintás kijelölt részkifejezésre ..... kisebb részkifejezés kijelölése

kattintás objektumra a CTRL-t lenyomva tartva ..... nem folyamatos objektumok kijelölése

kattintás kijelölt objektumra, gomb lenyomva és mozgatás ..... kijelölt objektum(ok) mozgatása

kattintás tabulátorra ..... ablak aktiválása

SHIFT+→, SHIFT+← ..... szomszédos részkifejezések kijelölése

Shif+↑, SHIFT+↓ ..... következő melységű részkifejezés kijelölése

Kifejezés szerkesztő eszköztár

Kifejezés beszúrása vagy **F3** ..... kijelölt kifejezés beszúrása

(Kifejezés beszúrása) vagy **F4** ..... kijelölt kifejezés beszúrása zárójelek közé téve

2D-ábrázolás ablak

vagy **F8** ..... távolítás függőlegesen

4. fejezet

Egyenletek és egyenlőtlenségek

A matematika alkalmazása abban áll, hogy matematikai modelleket állítunk fel valós helyzetekre és megoldjuk az idevágó problémákat. Nagyon sok matematikai modell használ egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket, avagy egyenlet-, és egyenlőtlenség rendszereket. Ismerjük meg az alapvető technikákat, hogyan használhatjuk a **DERIVE**-ot az ilyen problémák megoldására.

Indítsuk a **DERIVE**-ot alapbeállítással. Írjuk be a következő egyenletet: $5x-6 = 2x+15$.

```
#1:   5·x - 6 = 2·x + 15
```

Oldjuk meg az egyenlőséget a **Megoldás** gombra kattintva.[6]

```
#2:   SOLVE(5·x - 6 = 2·x + 15, x)
#3:                                    x = 7
```

A **DERIVE**-ban van lehetőségünk arra is, hogy lépésenként oldjunk meg egy egyenletet. Ez is jó példa arra, hogy milyen hasznos oktatási eszköz lehet a **DERIVE**.

Töröljük a #2 és #3 kifejezéseket úgy, hogy az ESC billentyűvel aktívvá tesszük az algebra ablakot, majd kétszer kattintunk a gombra, vagy a DEL billentyűvel.

```
#1:   5·x - 6 = 2·x + 15
```

Az egyenlet megoldása x-re úgy történik, hogy átalakítjuk $x = konstans$ formává. Ezt úgy érhetjük el, hogy megfelelő egyenletrendezési lépéseket választunk és alkalmazunk. Tipikusan azzal szoktuk kezdeni, hogy *„azokat a tagokat, melyekben szerepel az x az egyenlet egyik oldalára rendezzük, míg a többit a másikra"*. Itt jó megoldásnak tűnik, ha kivonunk mindkét oldalból $2x$-et.

Vonjunk ki $2x$-et az egyenletből. Írjuk be : *#1-2x*, ahol a #1 az első sorban lévő egyenletre utal.

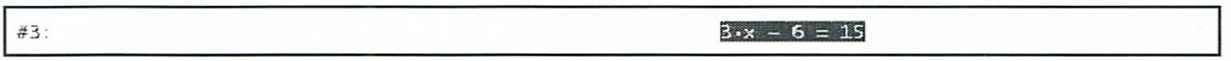
```
✓ = ≦ ≈ ≋ ✕  #1-2x
```

```
#2:   (5·x - 6 = 2·x + 15) - 2·x
```

A #2 kifejezés az egyszerűsítetlen egyenletrendezést mutatja.

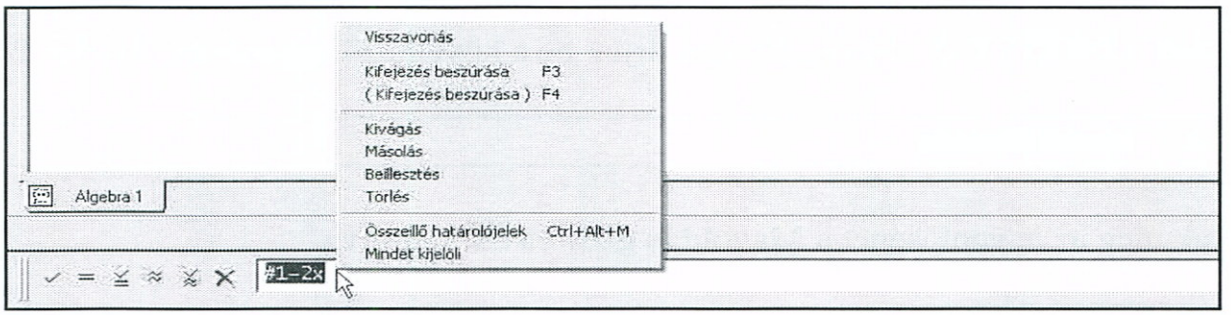
[6] A **DERIVE** lehetőséget nyújt egy *kifejezés* megoldására. Ez annak az egyenletnek a megoldását jelenti melyet a kifejezés nullával való egyenlővé tételével kapunk.

Hajtsuk végre az átalakítást, egyszerűsítsük a #2 kifejezést.



Ezzel egyszerűsödött a kifejezésünk és közelebb kerültünk célunkhoz, az $x = konstans$ formához. Válasszunk még egy egyenletrendezést, adjunk az egyenlet mindkét oldalához 6-ot.

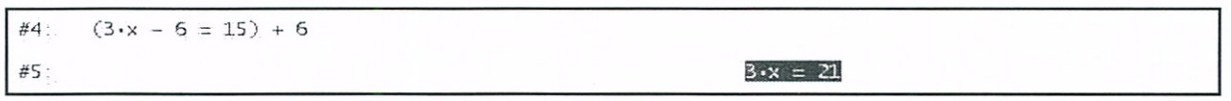
A művelet végrehajtásához válasszunk másik megoldást. Az egérkurzort mozgassuk a beviteli sorba, majd kattintsunk a jobb egérgombbal.



Hogy az egyenletrendezést végre tudjuk hajtani, az algebra ablakban lévő kijelölt kifejezésről egy másolatot kell készítenünk, és bevinni a beviteli sorba zárójelek között.

Készítsünk zárójelek közé helyezett másolatot ez egyenletről a **Kifejezés beszúrása** utasítást választva (vagy az **F4** gyorsbillentyű használatával). Gépeljük be a *+6*-ot.

Vigyük be és egyszerűsítsük a kifejezést a -vel vagy a CTRL + ↵ kombinációval.



A CTRL +↵ billentyűkombináció igen hasznos az un. „**bevitel és egyszerűsítés**" módszer gyakori használatához.

Kifejezésünk ismét egyszerűbb lett és közelebb kerültünk az $x = konstans$ formához. Ezen a ponton néhányan nehezen találják meg a megfelelő következő lépést. Nézzük meg mi történik, ha megpróbálunk mindkét oldalból kivonni 3-at.[7]

[7] Tanári megjegyzés: Sok tanulóra jellemző indoklásra ismerhetünk a következőben.: „ 3 áll az x változó előtt. Hogy megszabaduljunk tőle, ki kell vonnunk 3-at." Az a tanuló, aki így indokol, manuálisan x=18-ra alakítaná az egyenletet. Így egy írásbeli dolgozatban sokáig tartana, míg rájön, hogy ez hibás lépés volt és még tovább, amíg kitalálja, hogy mi volt a hiba. Viszont ha valaki ezt a témát a **DERIVE** segítségével tanulja a fentiek szerint, és megpróbál kivonni 3-at, *rögtön* rájön, hogy ezzel az egyenletrendezéssel nem egyszerűsödött az egyenlet. Sőt bonyolultabb lett. Ez azt jelenti, hogy a **DERIVE** fontos

Írjuk be és egyszerűsítsük: **F4** – 3

Ezzel az átalakítással az egyenlet komplikáltabb lett, tehát a -3 rossz választás volt. Vonjuk vissza az utolsó lépést és osszunk 3-al.

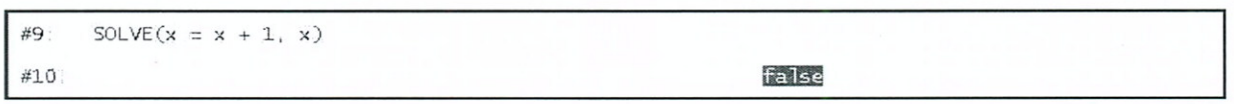
Töröljük az utolsó két kifejezést.

Mindkét oldal egyszerűsítéséhez írjuk be és egyszerűsítsük: **F4**/3

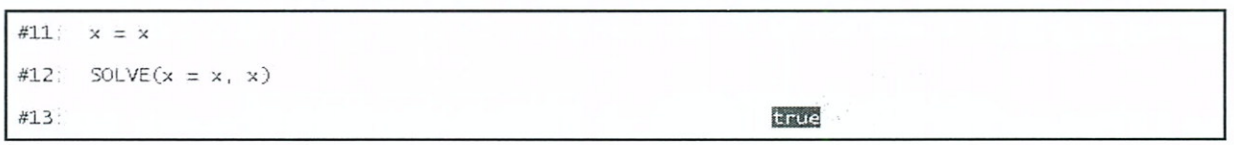
Ezt a módszertani fogást az *állványozás módszerének* nevezzük.[8]

Próbáljuk ki a **DERIVE** egyenletmegoldó alkalmazását az ellentmondásos egyenletre.

Írjuk be: $x = x+1$ és oldjuk meg a -val.



Írjuk be és oldjuk meg: $x = x$.



A *false*, vagyis *„az x -nek nincs olyan értéke, melynél az egyenlet érvényes"* logikai válasz azt mutatja, hogy a **DERIVE** felismeri és különválasztja azokat az egyenleteket melyeknek

---

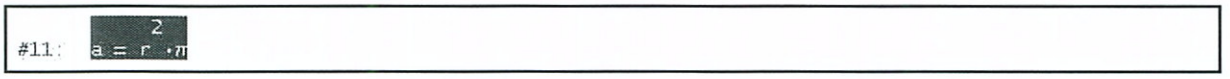
azonnali visszajelzést ad a választott megoldás helyességéről. Következésképpen a tanuló koncentrálhat arra, hogy megfelelő egyenletrendezési eljárást keressen és így kísérletezhet.

[8] Tanári megjegyzés: Ez a megközelítés lehetővé teszi, hogy a tanulók magasabb matematikai készséget szerezzenek akkor is, ha nem sajátítottak még el néhány, az alapokhoz szükséges lépést. Néhány ilyenféle készség csak a technikai megoldásokhoz szükséges és irreleváns az elmélyültebb megértés szempontjából. Így a technika ugyanazt a szerepet játssza, mint az építkezésnél az állványzat olyankor, amikor az alsóbb szintek még nincsenek befejezve. Innen az *állványozás módszere* elnevezés.

végtelen sok megoldása van illetve nincs megoldása. Azonosság esetén a **DERIVE** válasza *true* lesz.

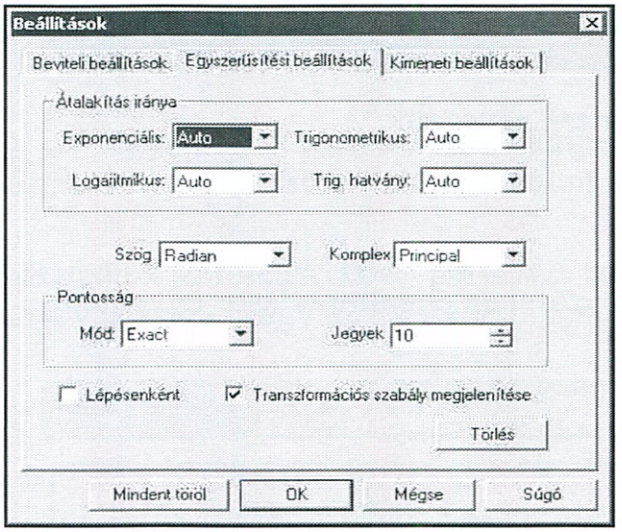
Oldjuk meg a következő egyenletet r-re: $A = r^2\pi$.

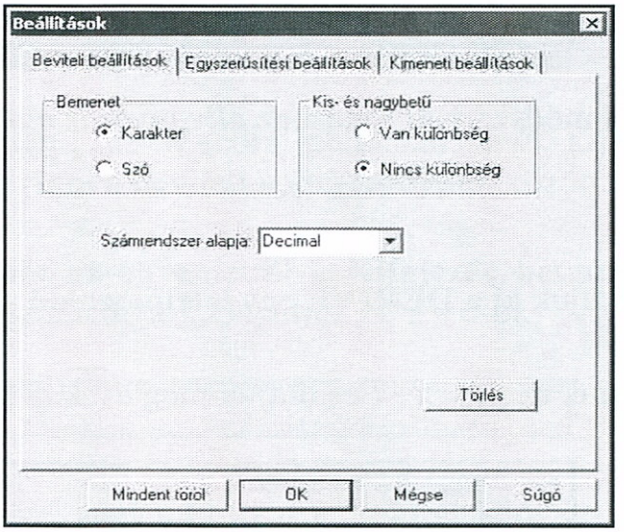
Írjuk be: *A=r^2pi*



Habár az 'A'-t nagybetűvel írtuk be, a **DERIVE** a kis 'a'-t jeleníti meg. Ennek oka, hogy alapbeállítás szerint a **DERIVE** nem tesz különbséget a kis és nagybetűk között. Változtassunk a beállításon:

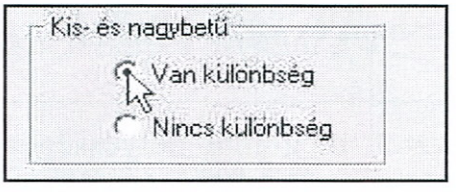
Állítsuk át a beviteli beállításokat: Nyissuk meg a megfelelő dialógusablakot a **Beállítások > Beállítások : Beviteli beállítások** utasítással.



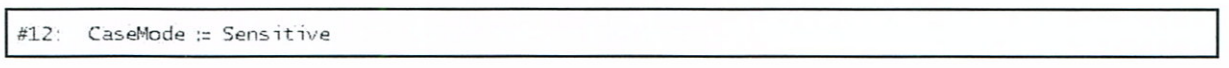


A **Kis- és nagybetű** mezőben beállíthatjuk, hogy a **DERIVE** tegyen-e különbséget a kis-, és nagybetűk között. A **Bemenet** mezőben beállíthatjuk, hogy a **DERIVE** az egy karakterből álló változókat (**Karakter** mód) vagy a több karakterből álló változóneveket (**Szó** mód) fogadja el.

A **Van különbség** gombra kattintva állítsuk be, hogy a **DERIVE** tegyen különbséget a kis-, és nagybetűk között ...



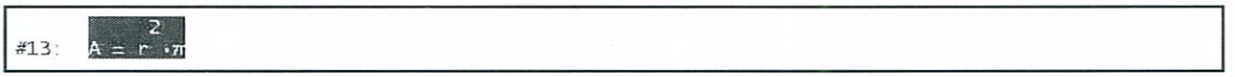
... és lépjünk ki az OK-val.



A beállítás megváltoztatásáról megerősítést kapunk a #12 sorban lévő megjegyzésben.

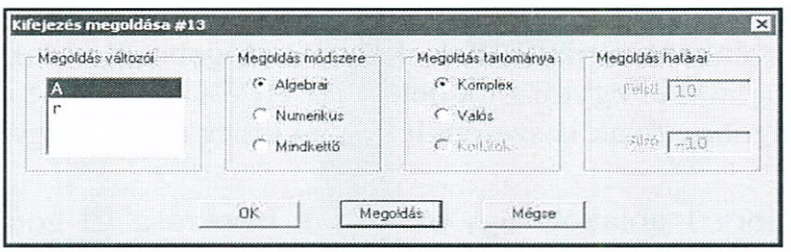
A CaseMode egy algebrai állapot változó, melynek értéke meghatározza a **DERIVE** viselkedését. Az ilyen állapot változók beállítását a menüparancsokkal végezhetjük el, mint az imént is láttuk, de beírhatunk a beviteli sorba egy olyan hozzárendelő kifejezést is, mint amilyet a #15-ben látunk. (A kettőspont-egyenlőségjel := elvégzi a hozzárendelés műveletét.) A **DERIVE** nem jelöli ki a menüből generált hozzárendeléseket, mert nem valószínű, hogy ezeket tovább kívánjuk használni. (Emlékeztető: ha egy utasítást használunk, vagy egy gombra kattintunk, az az éppen kijelölt kifejezésre vonatkozik.)

Vigyük be újra az $A = r^2\pi$ kifejezést (a még mindig a beviteli sorban lévő karaktersort felhasználva).



Most megmaradt a nagy 'A'. Ha r-re akarjuk megoldani az egyenletet, tegyük a következőt.

Készüljünk az egyenlet megoldására a **Megoldás** gombbal.



A **Megoldás változói** mezőben a kijelölt egyenletben előforduló összes változó fel van sorolva. A változók belső sorrendjének megfelelően az első lesz az alapbeállítás szerinti változó, amelyre megoldja az egyenletet.

Váltsuk át A-t r-re a következőképpen: Válasszuk ki r-t úgy, hogy a sorába kattintunk (bal oldali kép), majd szüntessük meg az A kijelölését a sorába kattintva.

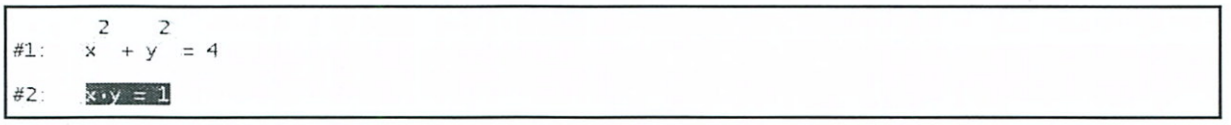
Zárjuk a feladatot a **Megoldás** utasítással.

A két megoldás megfelelően össze van kapcsolva a **vagy** logikai operátorral: v.

Az $x^2 + y^2 = 4$ és $xy = 1$ nemlineáris egyenletrendszer megoldásához nyissunk új munkalapot.

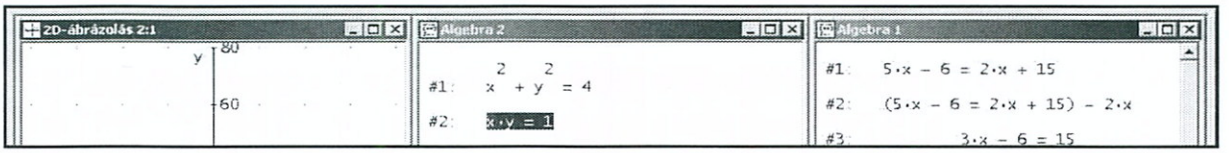
Nyissunk új munkalapot a -ra kattintva, vagy a **Fájl > Új munkalap** menüpontban.

Az $x^2 + y^2 = 4$ és $xy = 1$ egyenleteket vigyük be #1 és #2 kifejezésként.



Először próbáljuk ki a grafikus megközelítést. Jelenítsük meg a megfelelő ábrákat.

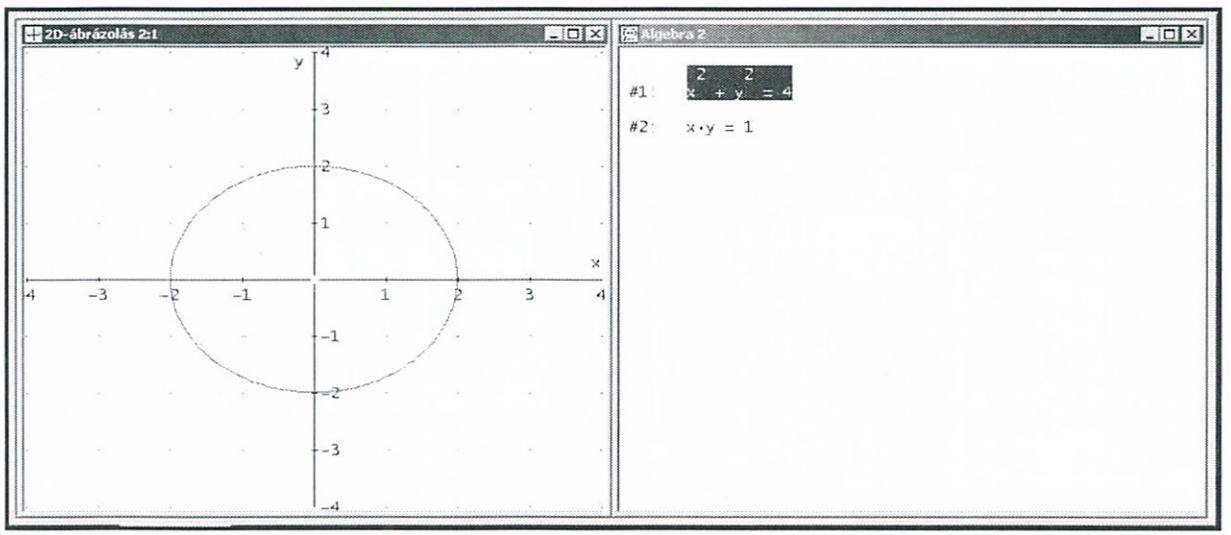
Nyissunk egy 2D-ábrázolás ablakot a gombbal, majd helyezzük az ablakokat egymás mellé az **Ablak > Egymás mellett** utasítással.



Hoppá! Már túl sok ablakunk van. Célunk, hogy az Algebra 2 ablak és a neki megfelelő 2D-ábrázolás ablak foglalja el egymás mellett a **DERIVE** ablakot. Az előző elhelyezésben viszont még az első algebra ablak is szerepelt. Mivel nincs rá szükségünk, zárjuk be.

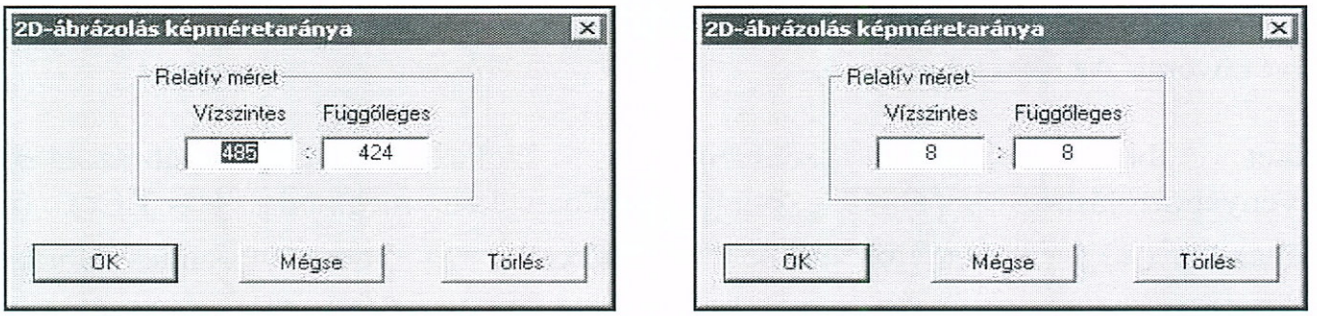
Zárjuk be az Algebra 1 ablakot vagy az **Ablak bezárása** ☒ gombjával, vagy miután aktívvá tettük, a **Fájl > Bezárás** utasítással.

Ismételjük meg a ablakelrendezés utasítást: **Ablak > Egymás mellett**. Jelöljük ki a kör egyenletét, #1, és jelenítsük meg.



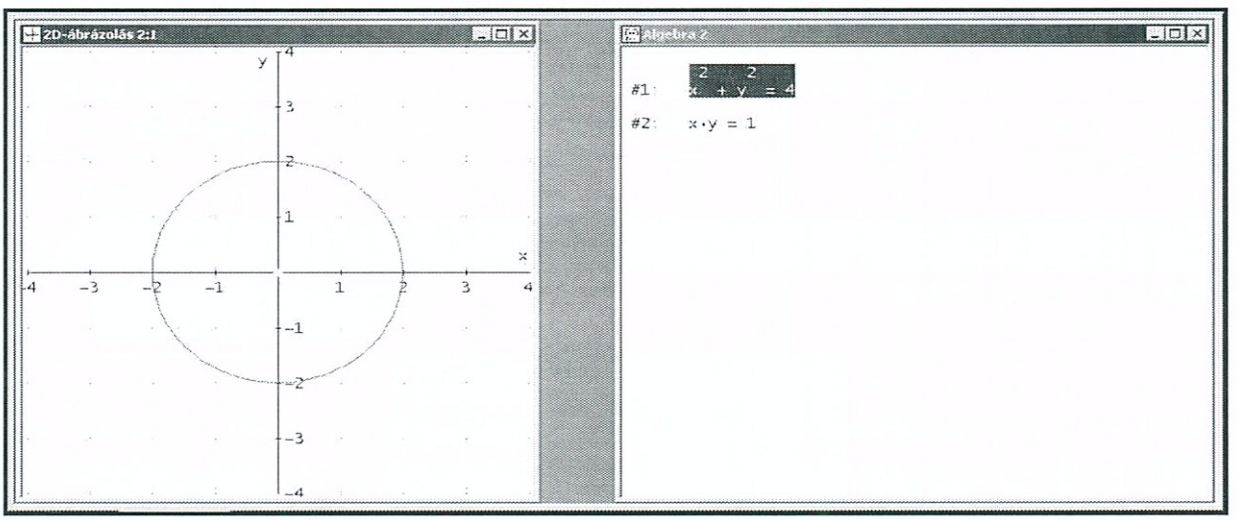
A kör egy kicsit lapított? A **Beállítások > Képméretarány** paranccsal beállíthatjuk, hogy a két tengely mentén az osztások egyenlő nagyságúak legyenek.

Adjuk ki a **Beállítások > Képméretarány** utasítást (bal oldali kép), majd kattintsunk a **Törlés** gombra.

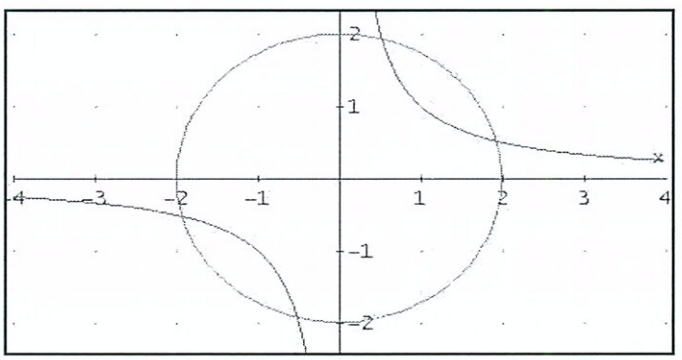


A **Vízszintes** és a **Függőleges** mezőben a jelenlegi képméretarányt láthatjuk, amely a 2D-ábrázolás ablak valós vízszintes és függőleges mérete pixelben. Amikor a vízszintes és függőleges hosszúságok és intervallumok aránya (melyeket a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Hosszúság/középpont** utasítással állíthatunk be) azonos a 2D-ábrázolás képméretaránya dialógusablakban látható két szám arányával, a kör valóban körként jelenik meg. A **Törlés** gombbal a jelenlegi intervallumok számát állíthatjuk be a két mezőben.

Lépjünk ki a 2D-ábrázolás képméretaránya dialógusablakból az OK-val



Ábrázoljuk a #2 kifejezés görbéjét.



Az $x^2 + y^2 = 4$ kör és az $xy = 1$ hiperbola négy pontban metszi egymást. Ezek koordinátái adják e két egyenlet egyidejű megoldását. Próbálkozzunk az ábra követése üzemmóddal, hogy megtaláljuk a grafikus megközelítést.

Mikor megpróbáljuk a követési módot bekapcsolni a gombbal, vagy a **Megjelenítési lehetőségek > Ábra követése** utasítással ...

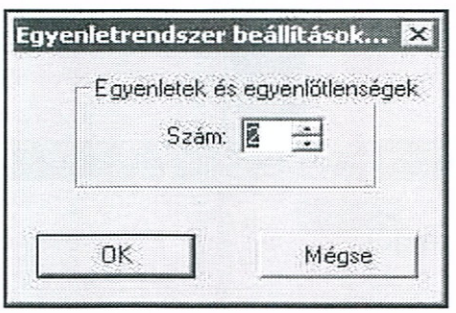
... nem jelenik meg a követő négyzet. Nyilvánvaló, hogy a **DERIVE** nem tudja ezeket az ábrákat követni. Az ok a következő:

Mindkét ábra implicit, szemben a szokásos függvényábrázolásokkal. Függvényábrázoláshoz az ábrát explicit formában kell megadni: $y = f(x)$ (rövid formában $f(x)$). Ebben az esetben a **DERIVE** az adott vízszintes ábrázolási tartományban x minden értékére kiszámítja a megfelelő $f(x)$ függvényértéket, majd berajzolja az összes $(x, f(x))$ pontot az ábrázolás ablakba. Egy implicit ábra implicit formában van megadva, például $g(x, y) = h(x, y)$ formában. Ezért a **DERIVE** általában nem tud egyedüli y értéket számolni adott x értékhez. Következésképpen a **DERIVE** szisztematikusan kutatja a teljes ábrázolási tartományt, hogy megtalálja azon (x, y) pontokat, melyek esetében $g(x, y) = h(x, y)$, vagyis a **DERIVE** a rács minden pontján ellenőrzi, hogy a $g(x, y) - h(x, y)$ jele változik-e. A **DERIVE** tudja követni a függvény ábrákat, nem tudja viszont követni az implicit ábrákat.

Zárjuk az ábrázolás ablakot és nyissuk az algebra ablakot teljes méretre.

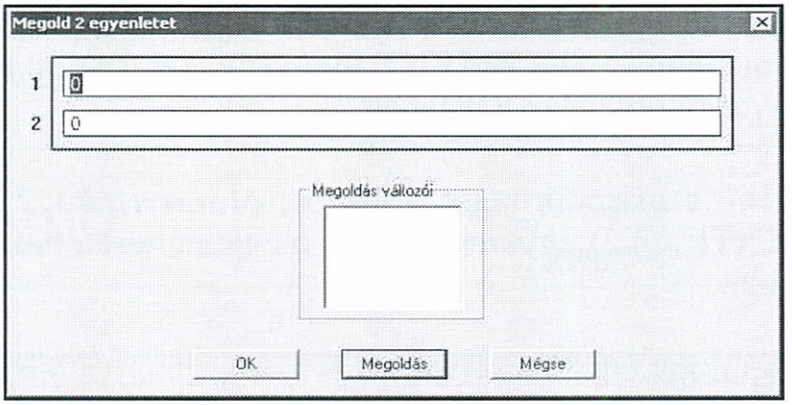
Az egyenletrendszerek algebrai megoldásához a **DERIVE** a **Megoldás > Rendszer** parancsot kínálja fel.

Indítsuk a **Megoldás > Rendszer** utasítást, hogy előkészítsük a #1 és #2-ből álló egyenletrendszer megoldását.



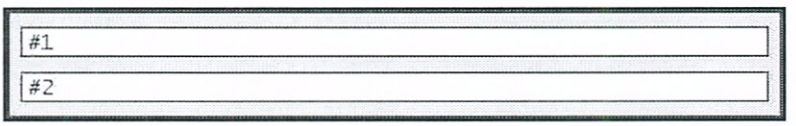
Meg kell adnunk az egyenletek számát. Az alapbeállítás két egyenletet jelöl.

Fogadjuk el a felajánlott kettőt az OK-val.

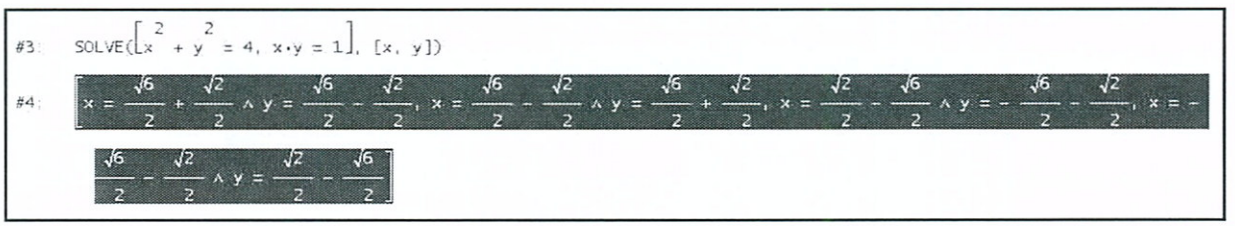


Ebbe a párbeszédablakba kell bevinnünk az egyenleteket és a változókat, melyekre a megoldást keressük. Az egyenleteket többféleképpen is megadhatjuk. Egyik lehetőség, hogy a **1** és **2** beviteli mezőbe közvetlenül beírjuk.

Írjuk a #1-t az első mezőbe, majd a ⇆ TAB billentyűvel lépjünk a második mezőbe és vigyük be a #2-t.

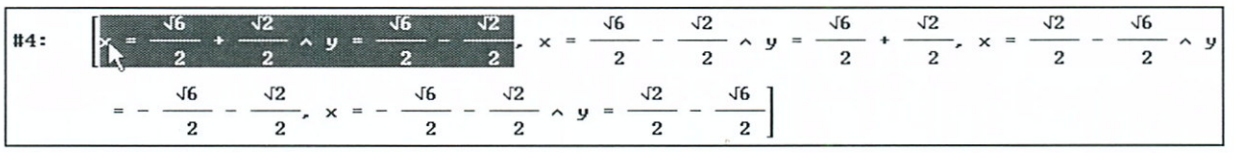


Oldjuk meg az egyenletrendszert a **Megoldás**-ra kattintva. Ilyen esetben, ahol ugyanannyi egyenlet van, mint amennyi ismeretlen, nem kell megadnunk az ismeretleneket.

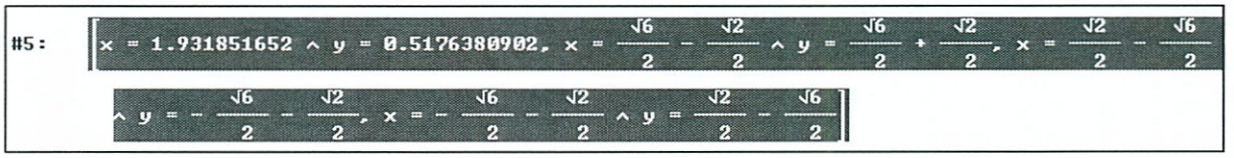


A #4 egy lista. (A listák szögletes zárójelben kerülnek megjelenítésre.) A lista elemei, amelyek vesszővel vannak elválasztva, adják a szóban forgó egyenletrendszer négy pontos megoldását. Használjuk a részkifejezés technikát az első megoldás kijelölésére.

Az első $x =$-re kattintva jelöljük ki a négy megoldás közül az elsőt.

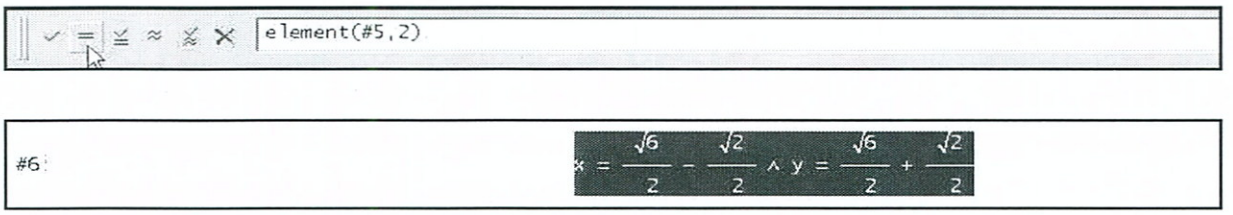


A **Kiértékelés** gombra ≈ kattintva számítsuk ki a közelítő értéket.



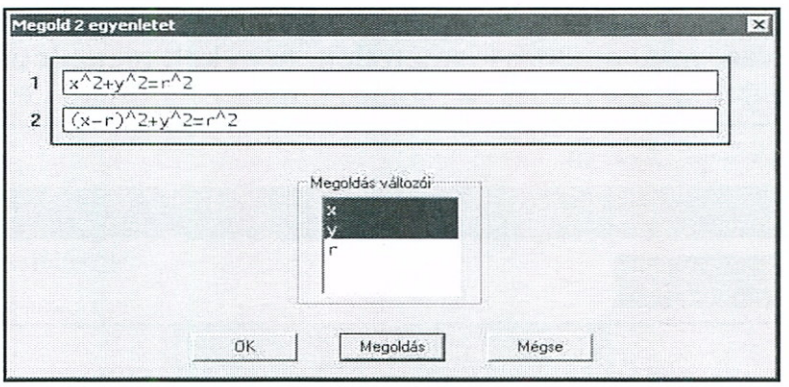
Az **ELEMENT** függvénnyel ki tudjuk emelni egy lista valamelyik tagját. Két argumentumot kell megadnunk az **ELEMENT** függvényhez. Az első argumentum a lista, a második a kiemelni kívánt elem helye a listában.

Ha ki akarjuk emelni a második tagot, írjuk be: *element(#5,2)*. Hogy elkerüljük a szükségtelen **ELEMENT**([...],2) egyszerűsítetlen megjelenítését, használjuk a beviteli sor **Egyszerűsítés** = gombját.



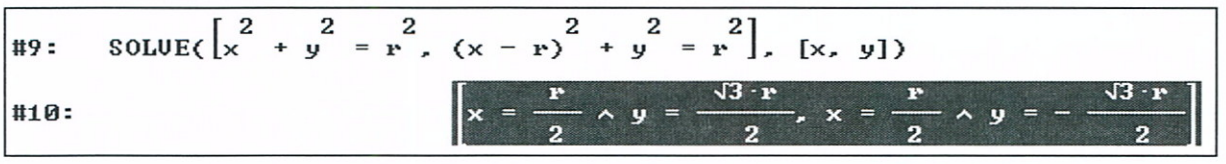
Következőként oldjuk meg x-re és y-ra a következő egyenletrendszert:

Indítsuk a **Megoldás > Rendszer** utasítást a két egyenletre. Az első egyenletet vigyük be a címkéje, #7 segítségével. A másodikat másoljuk be az **F3** billentyűvel. (Ne felejtsük el, hogy a második egyenlet még ki van jelölve.) A TAB billentyűvel ⇆ lépjünk a **Megoldás változói** mezőbe.



Ebben az egyenletrendszerben három változó van. A **Megoldás változói** mezőben láthatjuk mindhármat, közülük az első kettő ki van jelölve, mint az ajánlott változó.

Oldjuk meg az egyenletrendszert x-re és y-ra a **Megoldás**-sal.



Az algoritmus, mellyel a nem-lineáris polinom egyenletrendszereket a **DERIVE** megoldja, az Buchbergernek a Groebner elven alapuló metódusa, amely a Gauss-féle kiküszöböléses módszer általánosítása.

A fejezet hátralévő részében tanulmányozzuk az egyenlőtlenségek megoldását.

Nyissunk egy új munkalapot. Írjuk be a $2x+3<1$ kifejezést és oldjuk meg ugyanazzal az eljárással, mint az egyenleteket.

```
#1:  2·x + 3 < 1
#2:  SOLVE(2·x + 3 < 1, x)
#3:                                    x < -1
```

Alakítsuk a beírt kifejezést $|2x+3|<1$ formává az **ABS** abszolút érték függvényt elé helyezve és a bal oldalt () zárójelek közé téve …

```
abs(2x+3)<1
```

… majd vigyük be és oldjuk meg az új egyenlőtlenséget.

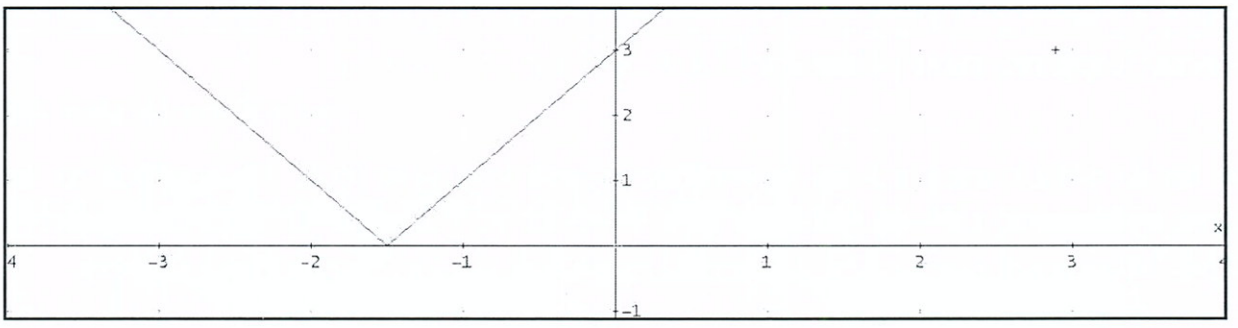
```
#5:  SOLVE(|2·x + 3| < 1, x)
#6:                                    -2 < x < -1
```

Használjuk a 2D-ábrázolás lehetőségét, hogy megjelenítsük ezt a példánkat. Ábrázoljuk különállóan az egyenlőtlenség bal és jobb oldalát, majd jelenítsük meg a megoldást is (lásd a 9.sz lábjegyzetet).

Jelöljük ki és ábrázoljuk az egyenlőtlenség bal oldalát (figyeljünk arra, hogy a teljes bal oldalt kijelöljük és ne csak az abszolút érték függvény közötti $2x+3$ részkifejezést), …

```
#4:  |2·x + 3| < 1
```

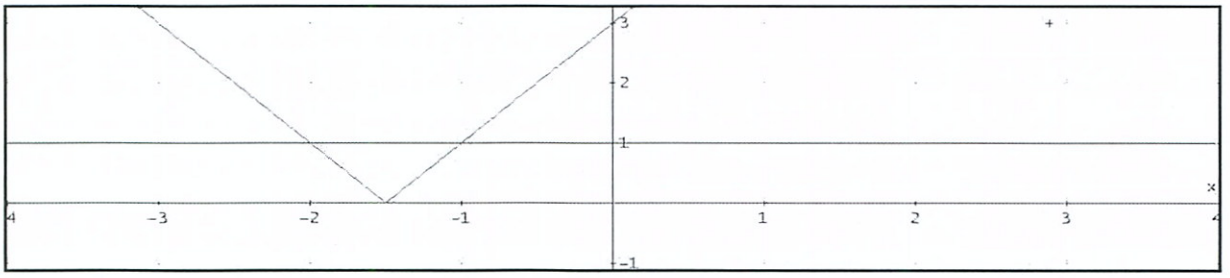
… nyissunk egy 2D-ábrázolás ablakot és kattintsunk a **Kifejezés ábrázolása** gombra .



Ábrázoljuk hasonlóképpen az egyenlőtlenség jobb oldalát: lépjünk át az algebra ablakba a gombbal és jelöljük ki a #4 kifejezés jobb oldalát.

```
#4:  |2·x + 3| < 1
```

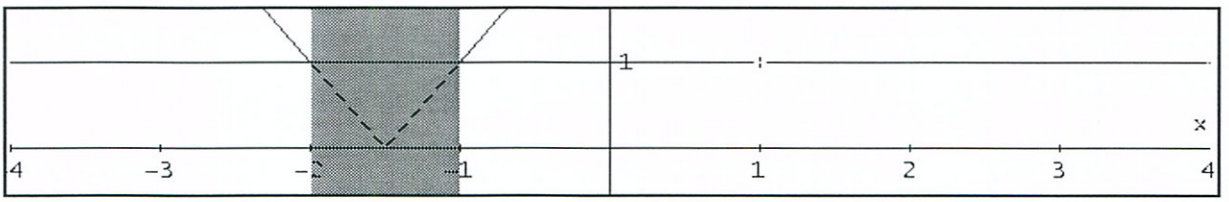
💻 Lépjünk az ábrázolás ablakba és jelenítsük meg a kijelölt kifejezést.[9]



Az egyenlőtlenség képi transzformációja a **2D-ábrázolás ablak**ban azt akarja mondani: keressük az x azon értékeit, amelyekre az első grafikon pontjai a második grafikon alatt vannak.

💻 Jelöljük ki a megoldást, ...

💻 majd ábrázoljuk.



Az árnyékolt terület tartalmazza mindazokat az (x, y) pontokat, melyekre az $|2x+3|<1$ igaz.

💻 Zárjuk be az ábrázolás ablakot.

Használjuk a logikai **és** operátort ($\wedge$ formában), hogy egyidejűleg fennálló egyenlőtlenségi rendszereket kapjunk, mint például a $|2x+3|<1 \wedge x \geq -3/2$.

💻 Írjuk be és oldjuk meg a fenti egyenlőtlenségek konjunkcióját. Használjuk az automata beillesztés módszerét a #4-re (jelöljük ki a #4-et és az **F2** majd az **F3** billentyűket leütve), utána írjuk be az *and a>=-3/2* kifejezést és oldjuk meg a gombra kattintva.

[9] Ebben a könyvben gyakran használjuk az „ábrázoljuk az E kifejezést". Ez szakmai fordulat, amely az alábbiak valamelyikét jelenti:

- Ábrázoljuk grafikusan az E által meghatározott pontok sorát
- Ábrázoljuk grafikusan az $y = E$ által meghatározott pontok sorát

#7: $|2 \cdot x + 3| < 1 \wedge x \geq -\frac{3}{2}$

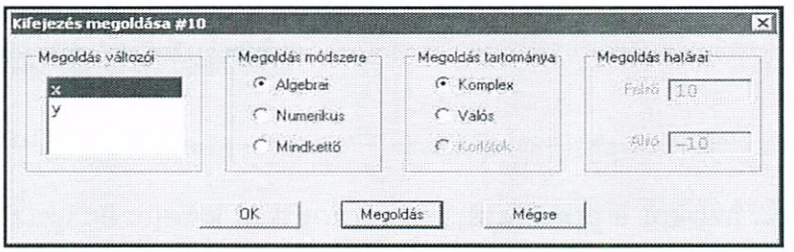
#8: SOLVE$\left(|2 \cdot x + 3| < 1 \wedge x \geq -\frac{3}{2}, x\right)$

#9: $-\frac{3}{2} \leq x < -1$

A következőben nézzünk egy példát a kétváltozós egyenlőtlenségre: $||2x + y| - 5| > 2$.

Írjuk be a következőképpen: *abs(abs(2x+y)-5)>2*

Kattintsunk a **Megoldás** gombra .



Mivel az egyenlőtlenség két változót tartalmaz, ki kell választanunk az egyiket, hogy eredményt kapjunk.

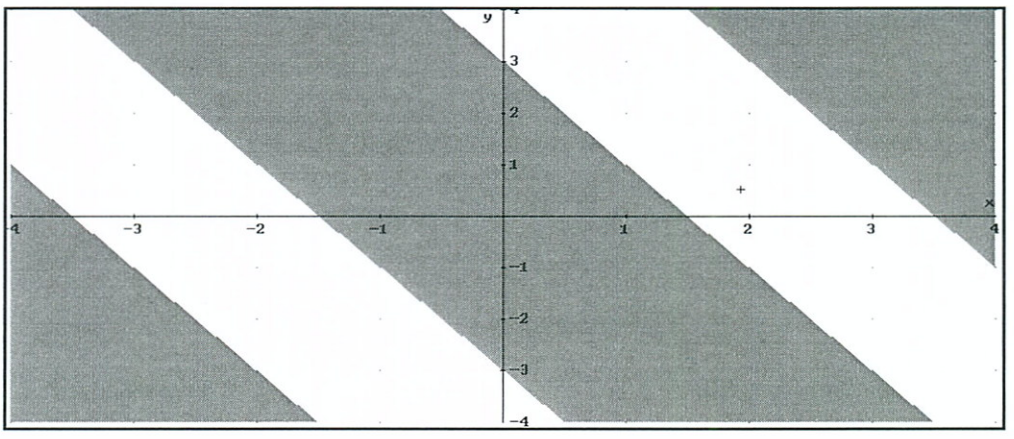
Válasszuk az y -t (rákattintva a sorára) és szüntessük meg x kijelölését (annak sorára kattintva). Lépjünk ki a párbeszédablakból a **Megoldás-**sal.

#11: SOLVE(||2·x + y| - 5| > 2, y)

#12: $y < -2 \cdot x - 7 \vee -2 \cdot x - 3 < y < 3 - 2 \cdot x \vee y > 7 - 2 \cdot x$

Jelenítsük meg az eredményt.

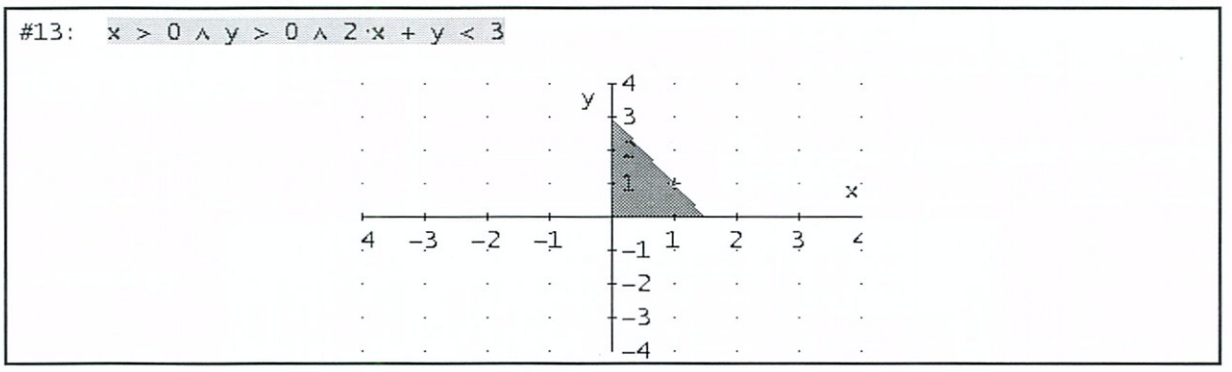
Nyissunk egy **2D-ábrázolás ablak**ot és ábrázoljuk a #12-t.



A #12, átírva $y > -2x - 7 \vee -2x - 3 < y < -2x + 3 \vee -2x + 7 < y$ formában a négy határvonalról hordozza az információt, vagyis $y = -2x - 7$, $y = -2x - 3$, $y = -2x + 3$ és $y = -2x + 7$. Ez a négy egyenes a négy váltás az árnyalt és a fehér mezők között.

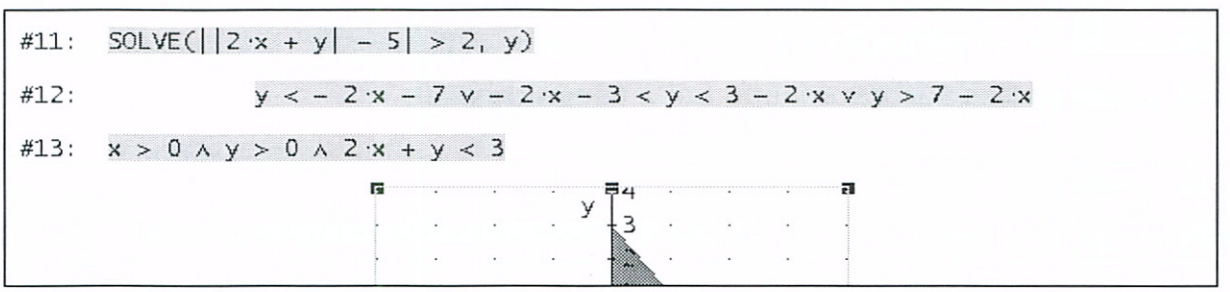
Az egyenlőtlenségek logikai kombinációinak ábrázolása különösen hasznos lehet a határozott optimalizálásra. Nézzük meg a következő példát.

💻 Zárjuk be az ábrázolás ablakot. Írjuk be, ábrázoljuk, majd ágyazzuk be a következőt: $x > 0 \wedge y > 0 \wedge 2x + y < 3$. Végül zárjuk az ábrázolás ablakot.



Az árnyalt rész mutatja azokat a pontokat, ahol a logikai kifejezés igaz.

💻 Leggyorsabban úgy tudjuk egy aktív munkalap összes objektumát törölni, hogy kijelöljük az egészet az **Szerkesztés > Mindent kijelöl** utasítással, …



💻 … majd használjuk a törlés gombot vagy billentyűt.

💻 Lépjünk ki a **DERIVE**-ból anélkül, hogy mentenénk a munkalapokat és a beállításokat.

Összefoglalás

Algebra ablak

vagy **Megoldás > Kifejezés** vagy CTRL + SHIFT + E ..... kijelölt kifejezés zérushelyének meghatározása

: Megoldás változói ..... megoldás változóinak kicserélése

Szerkesztés > Mindent kijelöl ..... az összes objektum kijelölése

Megoldás > Rendszer ..... egyenletrendszer megoldása

Meghatározások > Beviteli beállítások ..... kifejezés bevitelének beállításai

: Kis- és nagybetű ..... kis- és nagybetűk megkülönböztetése

: Bemenet egy vagy több karakteres változónevek

Kifejezés szerkesztő eszköztár

(Kifejezés beszúrása) vagy **F4** ..... kijelölt kifejezés beszúrása zárójelek közé téve

CTRL + ENTER vagy ..... kifejezés és az egyszerűsített kifejezés beírása

2D-ábrázolás ablak

..... váltás az algebra ablakra

Beállítások > Képméretarány ..... képméretarány beállítása a grafikus ablakban

Beállítások > Képméretarány: Relatív méret ..... a két tengely arányának megváltoztatása

Függvények

ABS ..... valós abszolút érték

ELEMENT ..... a lista egy elemének kiemelése

5. fejezet

Közelítő és pontos számítások

Alapbeállítás szerint a **DERIVE** pontos számítási módban dolgozik és az eredményt egész számokban, törtekben, gyökös kifejezésekben és irracionális állandókban — mint például a π vagy e — adja meg. De van egy közelítő érték számítási módja is, ahol tizedes törteket jeleníthetünk meg, más igényes számológéphez hasonlóan. A **DERIVE**-nak ezekkel szemben az az előnye, hogy a tizedes vessző előtt ill. után tetszőleges számú számjegyet használhat (figyelembe véve a számítógép memóriáját. Ebben a fejezetben megismerkedünk azzal, hogyan használhatjuk a közelítő érték pontosságának módját tizedes törtekkel és bemutatjuk a közelítő érték számításának alapvető korlátait.

Indítsuk a **DERIVE**-ot alapbeállítással.

Írjuk be a π-t és a **Kiértékelés** gombbal ≈ számítsunk közelítő értéket.

```
#1:  π
#2:                                        3.141592653
```

Ez egy 10 számjegyes közelítés. Ha akármi más számjegy pontosságot szeretnénk, indítsuk az **Egyszerűsítés > Kiértékelés** utasítást. Próbáljuk ki a 25 számjegyet.

Használjuk a **Egyszerűsítés > Kiértékelés** parancsot, adjuk meg a 25-öt.

```
#3:                                        3.141592653
```

Hoppá! Ez az eredmény semmiben sem tér el. Mi történhetett? A kifejezéshez fűzött megjegyzés: *Kiértékel(#2)* (lásd az állapotsor második panelje), vagyis ez az előzőleg generált eredmény közelítő értéke és nem a π-é.

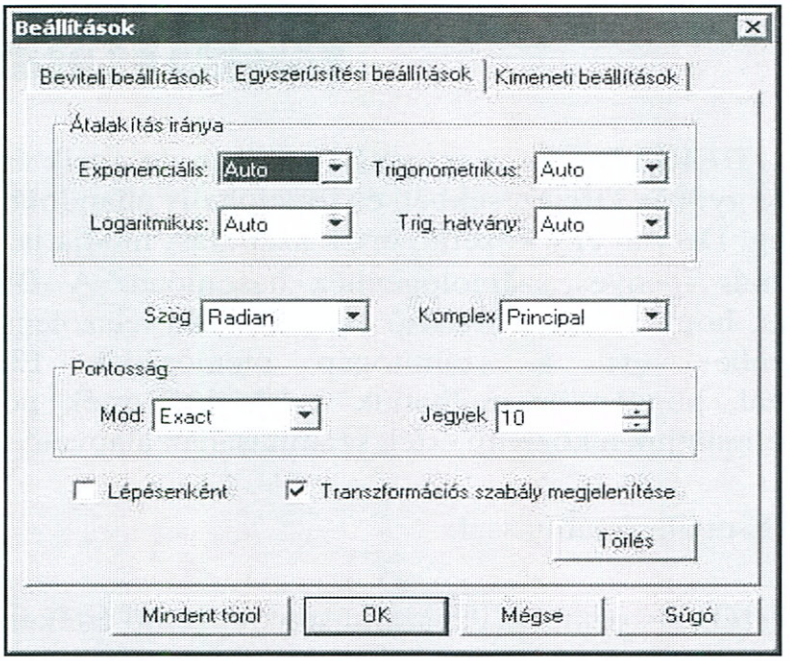
Próbáljuk meg újra. Töröljük a #3 kifejezést, jelöljük ki a π-t, indítsuk újra a **Egyszerűsítés > Kiértékelés** utasítást, megadva a 25 számjegyet.

```
#3:                                        3.141592653589793238462643
```

Szabályozhatjuk a közelítő érték számítás eszközeit (például a **Kiértékelés** gomb és az **Egyszerűsítés > Kiértékelés** utasítás beállításait) és/vagy az egyszerűsítés eszközeit (például az **Egyszerűsítés** gomb és az **Egyszerűsítés > Egyszerűsítés** utasítás beállításait) az **Egyszerűsítési beállítások** dialógusablakban. Alapértelmezés szerint az egyszerűsítés eszközök pontos, a közelítő számítás eszközök tíz számjegyes pontossággal közelítő értéket számítanak.

Először változtassunk a beállításon úgy, hogy a közelítő érték számítás eszközök más számjegy pontossággal számoljanak.

💻 Változtassunk a pontosságon. Indítsuk a **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** utasítást.



(Megjegyzés: Ebben az ablakban több angol nyelvű kifejezés található. Ez nem fordítási hiba, hanem ezeket a szavakat közvetlenül a Kernel használja, ami magyarul sajnos nem ért – a fordító)

A pontosságot a **Pontosság** részben két mezőben, a **Mód** és a **Jegyek száma** mezőben adhatjuk meg. A **Jegyek száma** mező értéke a közelítő érték eszközöket befolyásolja. A **Mód** mező értéke az egyszerűsítés eszközöket befolyásolja.

💻 Váltsunk 50 számjegyes közelítő érték pontosságra. A **Jegyek száma** mezőben írjuk át a 10-et 50-re vagy úgy, hogy aktívvá tesszük a mezőt és begépeljük az új értéket, vagy úgy, hogy a **Jegyek száma** mező jobb oldalán a kettős nyíl ÷ felső részére kattintgatunk, míg el nem érjük a kívánt számot.

```
#4:   PrecisionDigits := 50
#5:   NotationDigits := 50
```

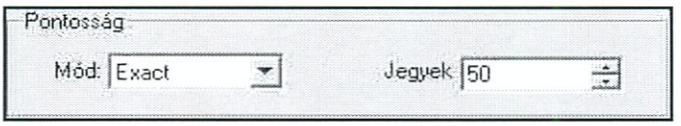
Két új algebrai változóval megjelenített kifejezést kaptunk. A számok pontosságának állítása automatikusan beállítja a számjegyek számát.

💻 Próbáljuk ki az új üzemmódot π-re a **Kiértékelés** gombbal ≈.

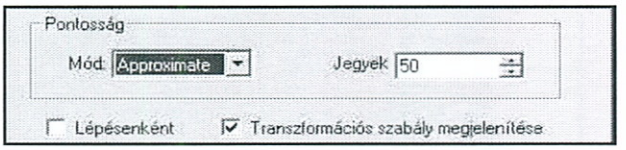
```
#6:                3.14159265358979323846264338327950288419716939937510
```

Az egyszerűsítés eszközöket átállíthatjuk, hogy úgy működjenek, mint a közelítő érték számítás eszközök. Próbáljuk ki.

💻 Állítsuk át az egyszerűsítés üzemmódot: nyissuk meg a **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** dialógusablakot, ...



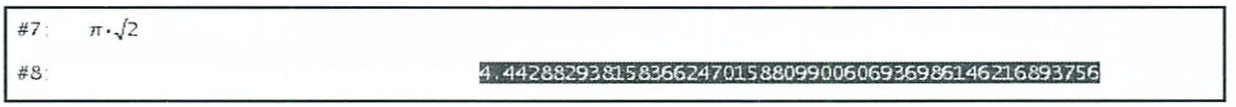
... nyissuk le a **Mód** mezőt, válasszuk az **Approximate** (közelítő) értéket, ...



...végül zárjuk az ablakot az OK-val

Most az **Egyszerűsítés** gomb és az összes többi egyszerűsítés eszköz másképp kellene, hogy viselkedjen. Próbáljuk ki az egyenlőségjellel, amely az egyszerűsítés eszközök egyike.

Egyszerűsítsük a $\pi\sqrt{2}$ -t. Írjuk be: *pi√2=*

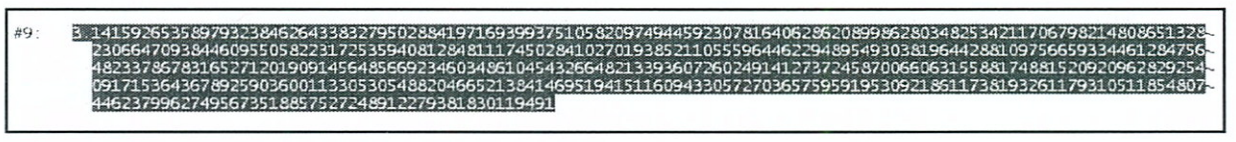


Exact üzemmódban a $\pi\sqrt{2}$ -t nem egyszerűsítette volna tovább.

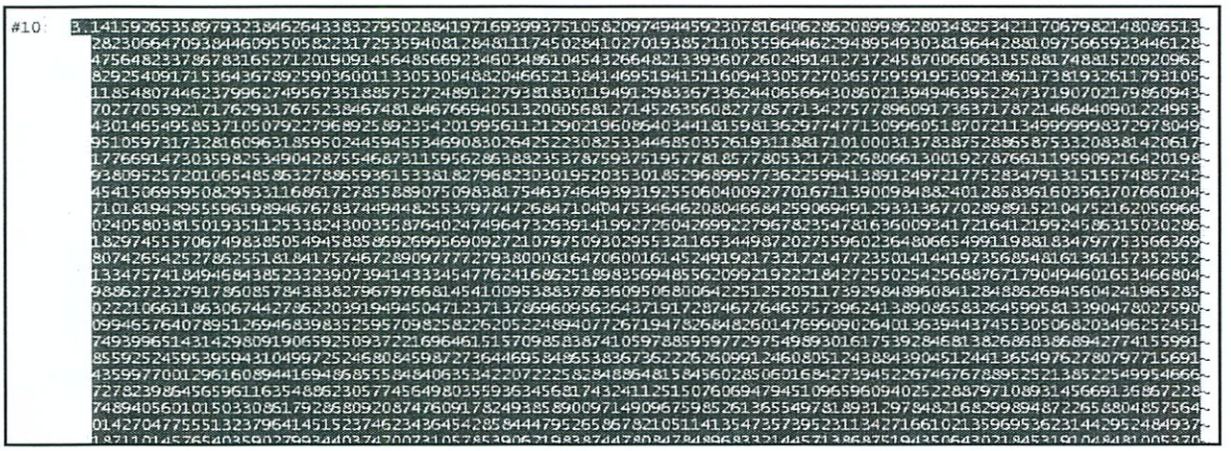
Közelítő számítást annyi számjegy pontossággal végezhetünk, amennyit a számítógép memóriája és a türelmünk elbír.

Számítsuk ki π közelítő értékét 500 számjegyre. Mivel most az **Egyszerűsítés** és a **Kiértékelés** gomb is 50 számjegy pontossággal számítana, az **Egyszerűsítés > Kiértékelés** utasítást kell használnunk, hogy megadjuk a nagyobb számjegyű pontosságot.

Számítsuk ki π közelítő értékét 500 számjegy pontossággal. Jelöljük ki π-t, indítsuk a **Egyszerűsítés > Kiértékelés** utasítást és állítsuk át a számjegyeket 500-ra.

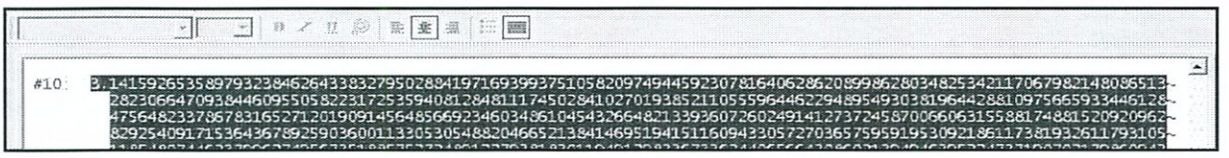


Számítsuk ki π közelítő értékét 5000 számjegy pontossággal.



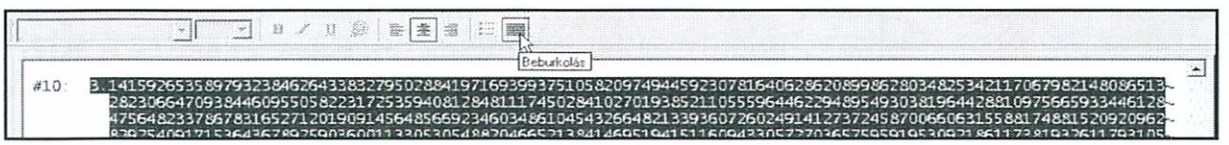
A mi 2GHz-es Pentium4-es számítógépünkön a számítás 0,47 másodpercet vett igénybe. Az eredmény olyan terjedelmes, hogy több oldalt foglal el a képernyőn, amint az látszik az algebra ablak jobb oldalán a függőleges görgetősávból is. Kapcsoljuk ki a sortörés üzemmódot. Ehhez először be kell kapcsolnunk a formázás eszköztárat.

💻 Kapcsoljuk be a formázás eszköztárat az **Ablak > Testreszabás** menüpontban:

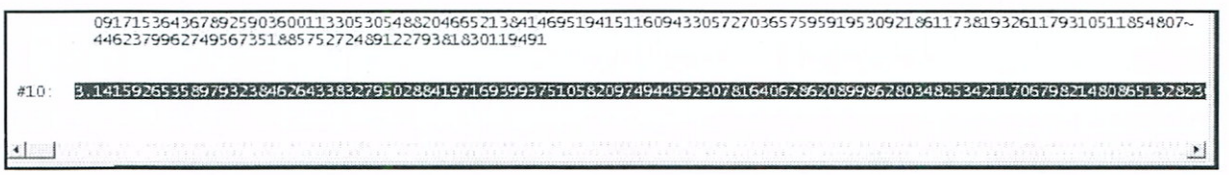


Az eszköztár gombjai a kijelölt kifejezés(ek)re vonatkoznak. Az itt halványan megjelenő gombok csak a szövegobjektumokra érvényesek.

💻 Szüntessük meg a kijelölt kifejezés sortörését …



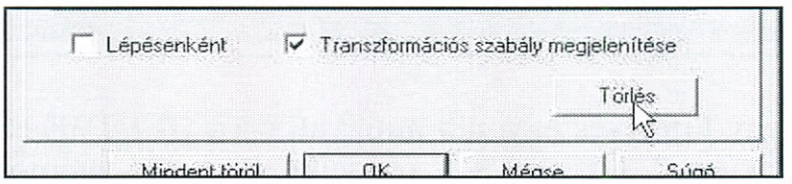
💻 … a **Beburkolás** gombra kattintva.



Most így mind a 5000 számjegy egy sorban jelenik meg. A vízszintes görgetősávból következtethetünk a #10 kifejezés hosszára. A #9 és az összes többi kifejezés megmarad sortöréssel az ablak szélességének megfelelően.

💻 Kapcsoljuk ki a formázás eszközsort a **Ablak > Testreszabás** pontban. Álljunk vissza az **Exact** üzemmódban a 10 számjegyes pontosságú közelítő számításra.

💻 Állítsuk vissza az alapbeállítás szerinti üzemmódot. Indítsuk a **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** utasítást és kattintsunk a TÖRLÉS gombra, …



🖳 és lépjünk ki az OK-val a dialógusablakból.

```
#11:  Precision := Exact
#12:  PrecisionDigits := 10
```

🖳 Töröljük ki a két utolsó kifejezést. (Ez persze nem módosítja beállításunkat.)

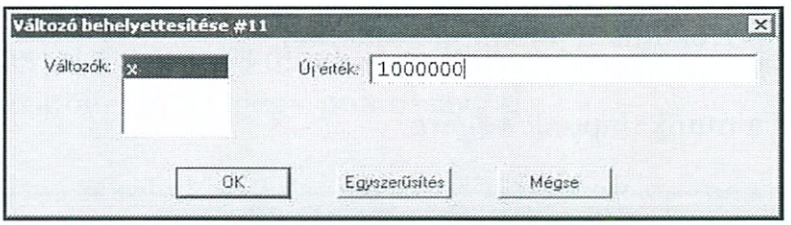
Az **Egyszerűsítési beállítások** párbeszédablak néhány más beállítását a későbbi fejezetekben tárgyaljuk.

A közelítő érték pontossága üzemmódban minden egyes számítást a megadott pontossággal hajtja végre a **DERIVE**. A következő példában láthatjuk, mit eredményezhet ez. Helyettesítsünk 1 milliót az $x\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$ kifejezésbe és számítsuk ki a kapott eredmény közelítő értékét.

🖳 Írjuk be az $x\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$ kifejezést.

```
#11:  x·√x·(√(x + 1) + √(x - 1) - 2·√x)
```

🖳 Helyettesítsük x-et 1 millióval. Használjuk a **Változó behelyettesítése** gombot [Sub], és írjunk 1000000-t az **Új érték** mezőbe.




```
#12:  (1000000.)·√(1000000.)·(√(1000000. + 1) + √(1000000. - 1) - 2·√(1000000.))
```

🖳 Számítsuk ki a #12 közelítő értékét a [≈] gombra kattintva.

```
#13:  0
```

Próbáljuk ellenőrizni ezt a meglepő eredményt a #13 egyszerűsítésével.

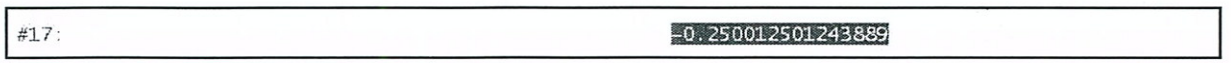
🖳 Jelöljük ki a #12 kifejezést és egyszerűsítsük.

Lehetséges az, hogy egy kifejezés egyenlő nullával, de a **DERIVE** ezt nem tudja algebrai egyszerűsítéssel bizonyítani? Az idő és a rendelkezésre álló memória szabta gyakorlati korlátok mellett valóban vannak algoritmusos korlátok is. Jó néhány éve kimutatták, hogy egy meglehetősen tipikus kifejezéscsoportra - melybe olyan „hétköznapi" matematikai objektumok mint például az x, **SIN**, **COS**, **LN**, **ABS**, π, stb – lehetetlen olyan algoritmust találni, mely bármely két ilyen kifejezésről el tudná dönteni azt, hogy egyenlők, vagy hogy egy ilyen kifejezés egyenlő nullával. Az egyszerűsítés egyszerre az egyik legfontosabb de egyben a legnehezebb része a matematikának.. A 8. fejezetet ennek a témának szenteljük.

Térjünk vissza a példánkhoz. A 0 eredmény kétes. Hasznos próbálkozás lehet ennek tisztázásához a pontosság növelése.

- Emeljük a számítás pontosságát 15 számjegyre, ...

- és így számítsuk #12 közelítő értékét újra.



Hoppá! Ez az eredmény jelentősen különbözik!

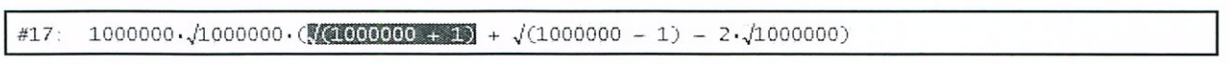
A fentiek mutatják a közelítő érték számításának korlátait. Minden esetben, amikor a számítógép tizedes törtben adja meg az eredményt, meg kell kérdeznünk: *„Mennyire pontos ez az eredmény?"* A **DERIVE** segítségével próbáljuk kideríteni, miért volt a tíz számjegyes eredmény ennyire pontatlan.

Végezzük el a kifejezés közelítő értékének kiszámítását lépésenként, először 15, majd 10 számjegy pontossággal. Kezdjük a jelenlegi ablakban.

- Mozgassuk a #12-t a munkalapunk végére.

Az automata újraszámozás miatt ez lesz az új #17.

- Jelöljük ki a $\sqrt{1000000+1}$ részkifejezést, azaz a zárójelben lévő kifejezés első tagját, ...



- ... majd kattintsunk a **Kiértékelés** gombra.

```
#18:  1000000·√1000000·(1000.00049999987 + √(1000000 - 1) - 2·√1000000)
```

Tegyük ugyanezt a $\sqrt{1000000-1}$ részkifejezéssel, azaz a zárójelen belül a második taggal,...

```
#18:  1000000·√1000000·(1000.00049999987 + √(1000000 - 1) - 2·√1000000)
#19:  1000000·√1000000·(1000.00049999987 + 999.999499999874 - 2·√1000000)
```

... és a $2\sqrt{1000000}$ -val, vagyis a harmadik taggal.

```
#19:  1000000·√1000000·(1000.00049999987 + 999.999499999874 - 2·√1000000)
#20:  1000000·√1000000·(1000.00049999987 + 999.999499999874 - 2000)
```

Számítsuk ki az egész zárójelben lévő kifejezés közelítő értékét, ...

```
#20:  1000000·√1000000·(1000.00049999987 + 999.999499999874 - 2000)
                                                                  -10
#21:  1000000·√1000000·(- 2.55998989959572·10   )
```

... és végül számítsuk ki a teljes kifejezés közelítő értékét.

```
#22:  -0.255998989959571
```

A lépésenkénti kiértékelés eredménye, a -0,255998989959571 szintén eltér az egy lépésben kapott eredménytől, a -0,250012501243889-től. (Az előző oldalon ez a szám a #17 kifejezés volt, de a mozgatás megváltoztatta a címkéket és ez lett a #16.) Az ok a kerekítésből eredő hiba, amely attól függően halmozódik, hogy hogyan értékeljük ki a kifejezést. A pontosság számjegyeinek növelésével kiderülne, hogy az eredmény -0,256 avagy -0,250 körül van.

De nézzük újra a -0,25 és a 0 közti különbséget. Végezzük el a lépésenkénti számítást egy új algebra ablakban, ezúttal 10 számjegy pontossággal.

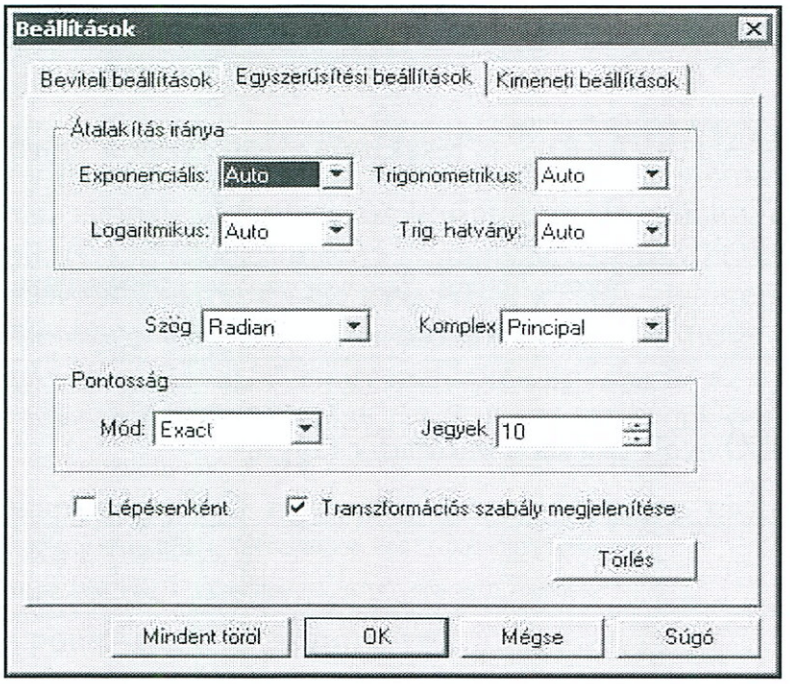
Jelöljük ki a még kiértékeletlen (jelenleg #17) kifejezést és másoljuk ki a vágólapra a CTRL+C-vel.

```
#17:  1000000·√1000000·(√(1000000 + 1) + √(1000000 - 1) - 2·√1000000)
```

Nyissunk egy új algebra ablakot a 🗋-val és illesszük be a vágólapról a kifejezést.

```
#1:  1000000·√1000000·(√(1000000 + 1) + √(1000000 - 1) - 2·√1000000)
```

Bizonyosodjunk meg, hogy az új algebra ablak az alapbeállítás szerinti 10 számjegyes pontossággal indult: adjuk ki a **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** utasítást.



Ez rendben van.

💻 Lépjünk ki a dialógusablakból változtatás nélkül az Esc-el.

💻 Csináljuk végig az előző lépéseket, kezdve a $\sqrt{1000000+1}$ -el.

```
#1:  1000000·√1000000·(√(1000000 + 1) + √(1000000 - 1) - 2·√1000000)
#2:                    1000000·√1000000·(1000.0005 + √(1000000 - 1) - 2·√1000000)
```

Figyeljük az első különbséget. 15 számjegy pontossággal a $\sqrt{1000000+1}$ egyszerűsítésének eredménye 1000,00049999987, míg 10 számjegy pontosságnál az eredmény az ettől alig különböző 1000,0005.

💻 Számítsuk ki a $\sqrt{1000000-1}$ részkifejezés közelítő értékét.

```
#2:                    1000000·√1000000·(1000.0005 + √(1000000 - 1) - 2·√1000000)
#3:                      1000000·√1000000·(1000.0005 + 999.9995 - 2·√1000000)
```

Látjuk a következő különbséget. Előbb 999,9994999999874-et kaptunk, most viszont 999,9995-öt.

💻 Számítsuk ki a $2\sqrt{1000000}$ részkifejezés közelítő értékét.

```
#3:                      1000000·√1000000·(1000.0005 + 999.9995 - 2·√1000000)
#4:                        1000000·√1000000·(1000.0005 + 999.9995 - 2000)
```

Mivel az egymillió négyzetgyöke pontosan ezer, itt nincs különbség.

Számítsuk ki a zárójeles kifejezés közelítő értékét.

```
#4:  1000000·√1000000·(1000.0005 + 999.9995 - 2000)
#5:  1000000·√1000000·0
```

Ez így katasztrofális. Az 1000,00049999987 és a 999,999499999874 összege a 2000-hez nagyon közeli számot ad, de még mindig különbözik attól. Ezzel szemben az 1000,0005 és a 999,9995 összege pontosan 2000, tehát a zárójelben lévő részkifejezés nullát ad eredményül. A zárójeles részkifejezésekre kapott 0 és a $-2{,}55998\ldots\cdot 10^{-10}$ közötti kis különbség sokszorozódik a $1000000\cdot\sqrt{1000000}$ -val (= 1000000000-val, vagyis 10^9 -el) való szorzáskor, és így már szignifikánssá válik. Ez a példa is mutatja a közelítő érték számításban rejlő veszélyt. Ilyen példákkal találkozhatunk, akárhány számjegyes pontossággal dolgozunk.

A következőben nézzünk ismét egy egyenletmegoldást.

Nyissunk egy új algebra ablakot a -val és írjuk be a következő polinom egyenletet: $5x^5+4x^4-2x^3+x^2+x-2=0$.

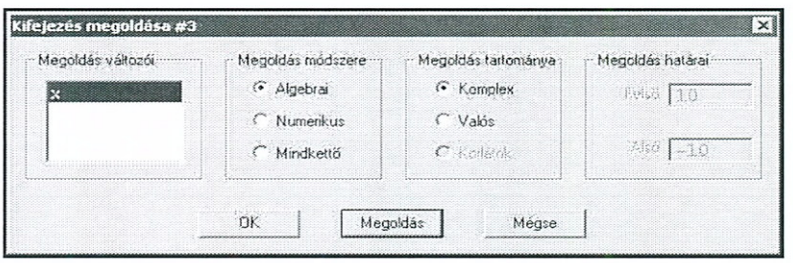
```
#1:  5·x^5 + 4·x^4 - 2·x^3 + x^2 + x - 2 = 0
```

Nézzük meg, mi történik, ha a **DERIVE** egyenletmegoldóját használjuk.

Oldjuk meg az egyenletet a **Megoldás** gombra kattintva.

```
#2:  SOLVE(5·x^5 + 4·x^4 - 2·x^3 + x^2 + x - 2 = 0, x)
#3:  5·x^5 + 4·x^4 - 2·x^3 + x^2 + x = 2
```

Mivel jelenleg a pontos számítás üzemmódban vagyunk, a **DERIVE** megkísérli a pontos megoldásokat megkeresni, de ez nem sikerül neki. Oldjuk meg numerikusan.



A **Megoldás módszere** mező háromféle megoldást kínál föl, közülük alapbeállításban az **algebrai**-t.

Oldjuk meg numerikusan az egyenletet a **Numerikus** gombra kattintva, majd lépjünk ki a párbeszédablakból a MEGOLDÁS gombbal.

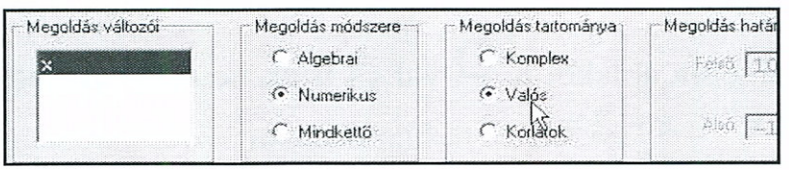
```
#4:  NSOLVE(5·x^5 + 4·x^4 - 2·x^3 + x^2 + x - 2 = 0, x)
#5:  x = -0.9943912287 - 0.2393468125·ί ∨ x = -0.9943912287 + 0.2393468125·ί ∨ x = 0.2593113040 - 0.7094550609·ί ∨ x =
     0.2593113040 + 0.7094550609·ί ∨ x = 0.6701598494
```

Az egyszerűsítetlen #4 az **NSOLVE** függvény alkalmazására utal. (Az 'N' az **NSOLVE**-ban a numerikus megoldást jelzi.) Az egyszerűsített #5 kifejezés 2 komplex és 3 valós megoldást tartalmaz, mely utóbbiak közül az egyik a -1 egész szám. Ha csak a valós megoldások érdekelnek bennünket, egy megfelelő szűrőt alkalmazhatunk.

Oldjuk meg újra numerikusan. Jelöljük ki és kattintsunk a gombra.,...

```
#1:  5·x^5 + 4·x^4 - 2·x^3 + x^2 + x - 2 = 0
```

... a **Megoldás tartománya** mezőben válasszuk a **Valós** gombot, ...



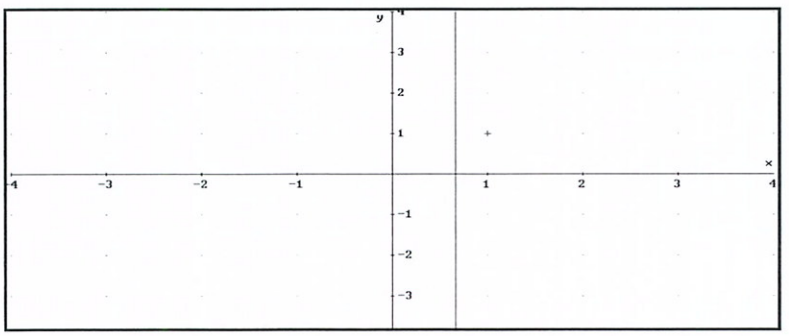
... majd lépjünk ki a MEGOLDÁS-sal.

```
#6:  NSOLVE(5·x^5 + 4·x^4 - 2·x^3 + x^2 + x - 2 = 0, x, Real)
#7:                                                  x = 0.6701598494
```

Egy valós eredményt kapunk.

Zárjuk a fejezetünket a probléma és a megoldás vizuális megjelenítésével. Először ábrázoljuk a polinomot.

Jelöljük ki a #1 kifejezést, nyissunk egy 2D-ábrázolás ablakot, majd ábrázoljuk a kifejezést.



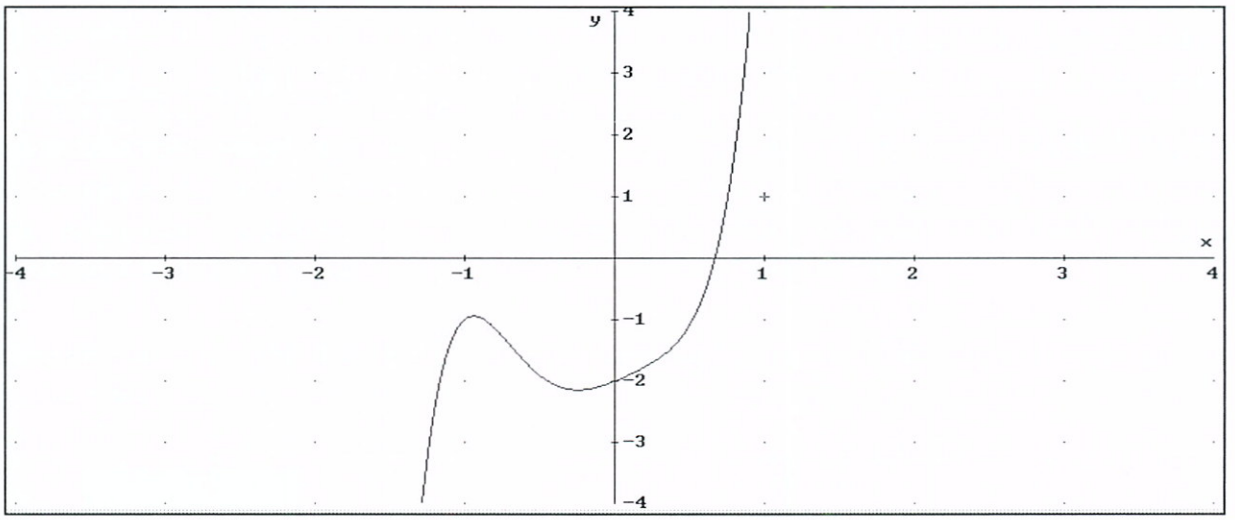
Furcsa eredményt kapunk. Várjunk egy pillanatig! Ez az x=0,6701598494 grafikonja, amely az egyenlet egyetlen megoldása a valós számok körében! Ezt az $5x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ egyenlet implicit ábrázolásaként kaptuk, amely a

valós számok körében megfelel az x=0,6701598494 egyenesnek. Önkéntelenül ez lett az eredmény vizuális megjelenítése.

💻 Jelenítsük meg a polinomot. Töröljük a függőleges egyenest, jelöljük ki az egyenlet bal oldalát, ...

```
#1:  5·x^5 + 4·x^4 - 2·x^3 + x^2 + x - 2 = 0
```

💻 ... és most ábrázoljuk.[9]



💻 Lépjünk ki a **DERIVE**-ból mentés nélkül.

[9] Tanári megjegyzés: Kérjük meg a tanulókat, hogy változtassanak a polinom együtthatóin úgy, hogy három vagy öt megoldást kapjunk a valós számok körében – vagy kívánságunknak megfelelően viselkedjék másképpen.

Összefoglalás

Algebra ablak

Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások .....
..... kifejezés egyszerűsítési beállításainak megváltoztatása

: Mód..... egyszerűsítés pontossági módjának beállítása (**Exact**, **Approximate**, **Mixed**)

: Jegyek száma ..... egyszerűsítéskor a számított számjegyek számának megadása

vagy **Megoldás > Kifejezés**

: Megoldás módszere ..... egyenlet megoldásának beállítása

: Megoldás tartománya..... értelmezési tartomány beállítása

6. fejezet

Sorozatok és a görbék családjai

Ebben a fejezetben a vektorokkal, mint objektumokkal foglalkozunk. A vektorokkal végzett műveleteket a 9. fejezet taglalja. Beszélünk a sorozatokról is, arról, hogyan használjuk és jelenítjük meg őket a **DERIVE**-ban. A függvények vektorai a görbék családjához vezetnek el bennünket.

Rokon objektumokat gyakran összekapcsolunk valamilyen módon. Például egy család tagjai ugyanazt a családnevet viselik, de a keresztnevek lehetővé teszik, hogy egyénileg szólítsuk meg őket. Az egy utcában lévő házak címében ugyanaz az utcanév áll, de a házszámok alapján megkülönböztethetjük a házakat. A vektorokról alkotott matematikai felfogás hasonló. Több objektumot összekapcsolunk úgy, hogy közéjük vesszőt teszünk, és szögletes zárójelbe foglaljuk őket. A teljes kifejezés, melyet vektornak nevezünk, új objektumként szerepel. Ugyanilyen elven alapulnak a sorozatok.

Indítsuk el a **DERIVE**-ot alapbeállítással. Írjuk be a következő vektort: *[5^0,3,x+y+x]*

```
#1:  [5^0, 3, x + y + x]
```

Ez egy háromtagú vektor. Ha a vektort egyszerűsítjük, minden tagja egyszerűsítésre kerül.

Egyszerűsítsük a #1 vektort.

```
#2:                                    [1, 3, 2·x + y]
```

Alapvetően kétféleképpen írhatunk be vektorokat. Egyrészt, mint az imént, szögletes zárójelek közé írhatjuk a vektor tagjait. Másrészt használhatjuk a **VECTOR** függvényt és megadhatjuk a vektort úgy, hogy a tagjait generáljuk.

Írjuk be azt a vektort, amely az első hét szám négyzetét tartalmazza: majd egyszerűsítsük a kifejezést: *vector(n^2,n,1,7).*

```
#3:  VECTOR(n^2, n, 1, 7)
#4:                          [1, 4, 9, 16, 25, 36, 49]
```

A #3 kifejezést a következőképpen olvashatjuk: *„Ez egy olyan vektor, melynek tagjai egyenlők n^2-tel és ahol n tartománya az egész számok között 1-től 7-ig terjed."* Általánosítva, a vektor függvény a következő tényezőket tartalmazza:

- Az első tényező a tagok generálásának leírása.
- A második tényező a változó megjelölése.

- A harmadik tényező a változó kezdőértéke vagy a változó összes indexét tartalmazó vektor.
- A negyedik tényező a változó utolsó értéke.
- Az ötödik, választható tényező a változó indexének növekedési lépése. Alapbeállításban ez 1.

Alakítsuk úgy az előző példát, hogy vegyük a lépésközt 2-nek.

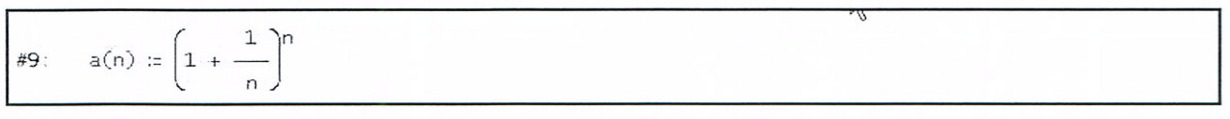
💻 Írjunk be egy vektort, mely az első hét négyzetszám közül minden másodikat tartalmazza. Adjuk a kifejezéshez, amely még mindig a beviteli sorban van a 2-t ötödik tényezőként, és egyszerűsítsünk.

Ha a változó értéktartománya nem adható meg az első és utolsó taggal, valamint a léptékkel, a **VECTOR** függvény harmadik tényezőjeként a megfelelő értékek vektorát adjuk meg.

💻 Írjuk be azt a vektort, melynek tagjai 1, 3, 4 és 7, a következő módon: *vector(n^2,n,[1,3,4,7])*, majd egyszerűsítsük.

Egy vektort véges sorozatként is értelmezhetünk. Nézzük az a sorozatot ennek megfelelően $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$-ként értelmezve. A hagyományos tankönyvek egy sorozat tagjaira az alsó indexszel utalnak, mint pl. az a_n. Egy sorozatot értelmezhetünk úgy is, mint a pozitív egész számok számsorokkal értelmezett függvényei, melyeket jelölhetünk $n \alpha\ a_n$, vagy $a_n = a(n)$ formában. A **DERIVE**-ban sorozatok definiálására használjuk az $a(n)$ jelölést, kiegészítve a := hozzárendelési jellel.

💻 A fenti sorozatot most írjuk be a következőképpen: a(n) := (1+1/n)^n



A **DERIVE** terminológiája szerint a #9 egy függvény definíciója. A „kettőspont-egyenlő" hozzárendelő műveleti jel függvények definiálására használatos, illetve, hogy a változóknak értéket adjunk.

Innentől kezdve az a sorozat (függvény) úgy használható, mint bármely más beépített függvény.

Számítsuk ki a sorozat ötödik tagját, írjuk be és egyszerűsítsük az $a(5)$-öt.

```
#10:  a(5)

#11:                                                    7776
                                                        3125
```

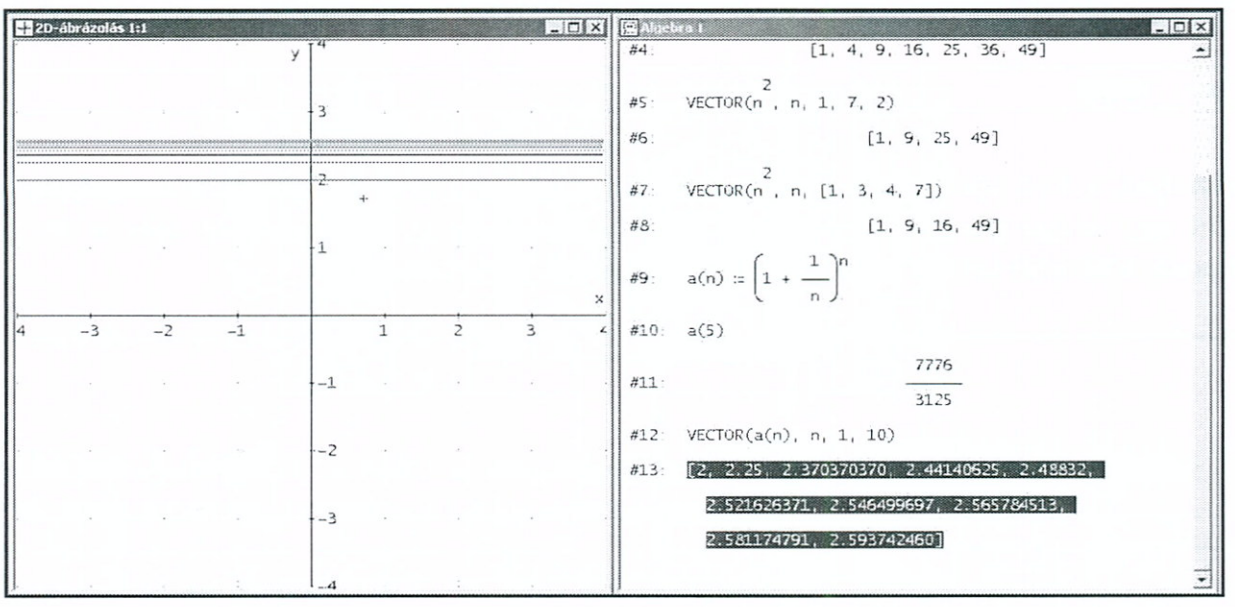
A **VECTOR** függvénnyel kombinálva ezután könnyedén kiszámíthatjuk a (végtelen) sorozatok akárhány elemét.

Számítsuk ki az a sorozat első tíz tagját, begépelve és egyszerűsítve a következőt: *vector (a(n),n,1,10)*

```
#12:  VECTOR(a(n), n, 1, 10)
#13:  [2, 2.25, 2.370370370, 2.44140625, 2.48832, 2.521626371, 2.546499697, 2.565784513, 2.581174791, 2.593742460]
```

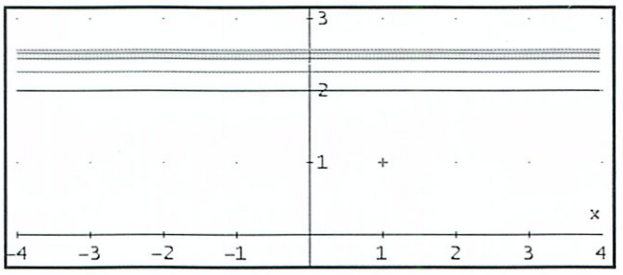
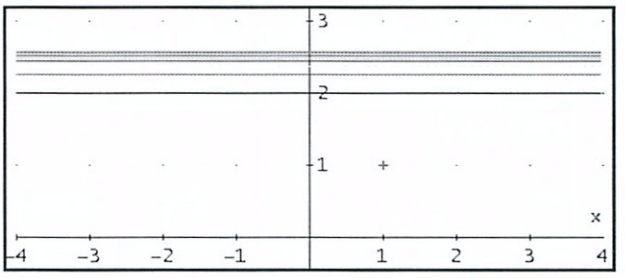
Ábrázoljuk a sorozat első tíz elemét.

A #13 ábrázolásához nyissunk egy ábrázolás ablakot, használjuk az **Ablak > Egymás mellett** utasítást, majd használjuk a **Kifejezés ábrázolása** gombot, vagy parancsot.



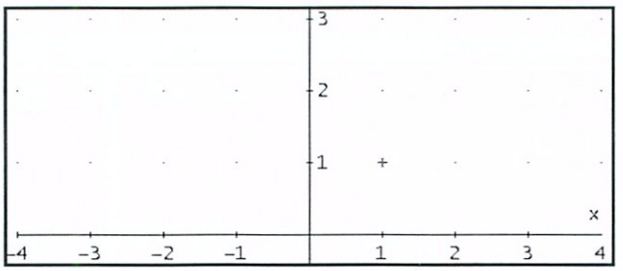
Ez a tíz vízszintes egyenes nem az, amit vártunk. Amit a képernyőn látunk az nem más, mint az $y = 2$, $y = 2{,}25$, $y = 2{,}370370370$, ..., egyenleteknek megfelelő egyenesek családja. Más szóval az $y = a(n)$ egyenesek családja, ahol $n = 1,...,10$. A **DERIVE** úgy ábrázol egy vektort, hogy annak minden tagját egyenként jeleníti meg. (Emlékezzünk, hogy minden *tag* úgy jelent meg, mint az *y=tag* egyenlet által definiált függvény ábrája.) A sorozatok szokásos ábrázolása az $(n, a(n))$ koordináták által megadott pontokkal történik. Nézzük, hogyan ábrázolunk pontokat.

Töröljük a vízszintes egyeneseket az **Utolsó ábra törlése** gombbal ⊠. Üssük le egyszer, majd még egyszer.

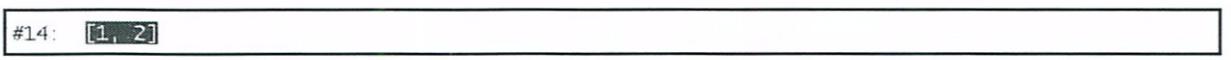



Az **Utolsó ábra törlése** gombra kattintva csak rövid villanást látunk az egyenesek családjának felső részén. Ennek az az oka, hogy a ⊠ gomb minden lenyomásakor csak egyetlen egyenest törölt.

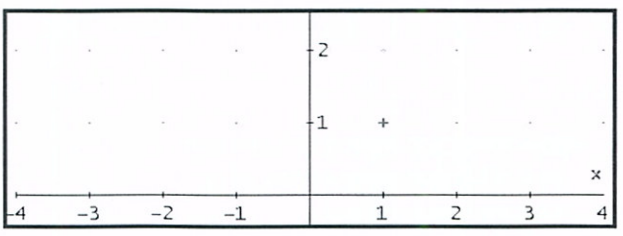
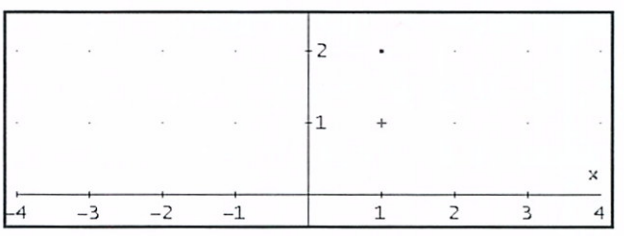
Az összes egyenes törléséhez használjuk a **Szerkesztés > Összes ábra törlése** utasítást.



Írjuk be az (1, 2) pontot, mint egy kéttagú vektort: *[1 , 2]*



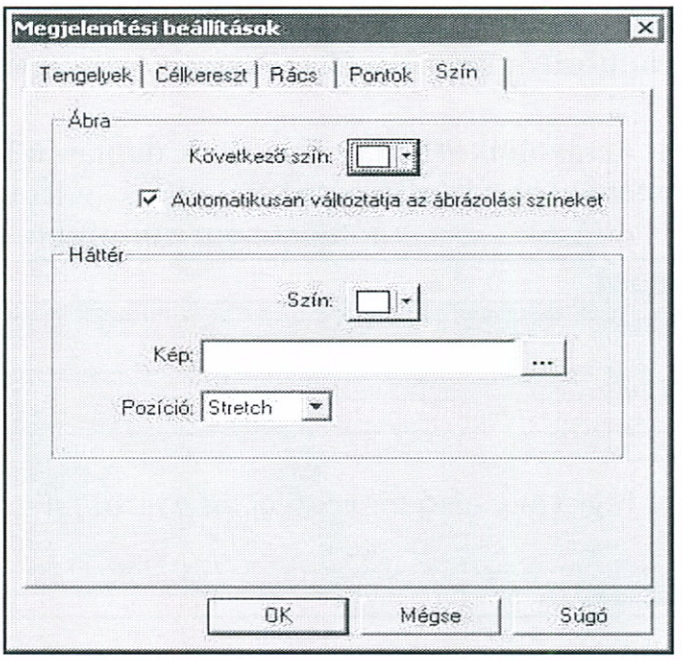
Ábrázoljuk a #14 sorban megadott pontot. Üssük le újra a **Kifejezés ábrázolása** gombot ⊠. Ezzel egy sárga pontot helyeztünk be (bal oldali kép). Nyomjuk le újra a ⊠ gombot. Most a pont sötétebb lett. (Géptől függően a színek eltérhetnek.)

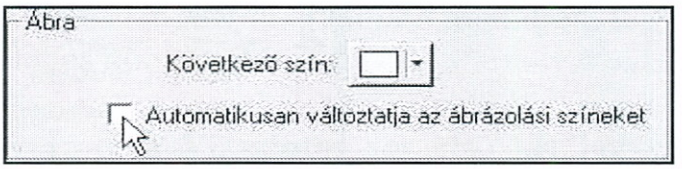
Minden új ábra új színnel jelenik meg. Valószínű, hogy az első pont fehér volt, ez lehet a magyarázata, miért nem volt látható az (1,2) rácspont.

Alapbeállításban a **DERIVE** az új ábrához mindig új színt választ. Kapcsoljuk ki ezt az üzemmódot és válasszuk ki kedvenc színünket az ábrákhoz.

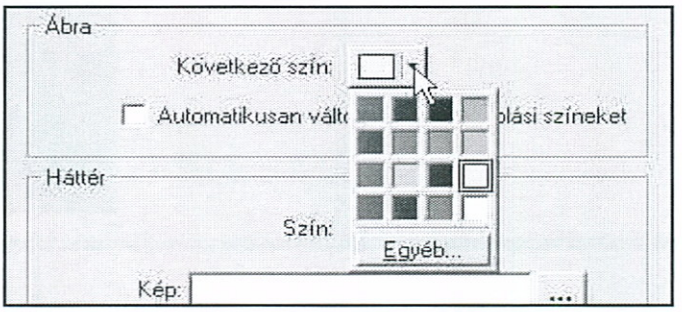
Nyissuk meg a **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés** menüt, és kattintsunk a **Szín** fülre...



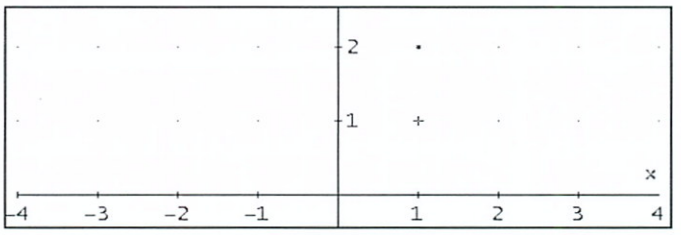
... majd rákattintva kapcsoljuk ki az **Ábrázolási színek változtatása** üzemmódot.



Válasszuk ki az ábrázolás színét: nyissuk meg a **Következő szín** menüt ...



...rákattintva jelöljük ki a nekünk megfelelő színt, majd zárjuk a menüpontot az OK-val. Jelenítsük meg a pontot, immár a kiválasztott új színnel.

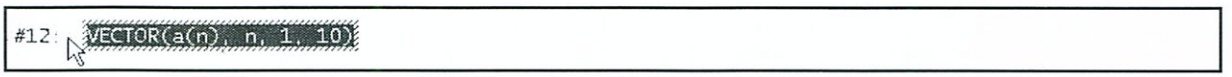


A pont mérete megválasztható a **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Pontok** menüben, ahol beállíthatunk **Kicsi**, **Közepes** (alapbeállítás) és **Nagy** méretet.

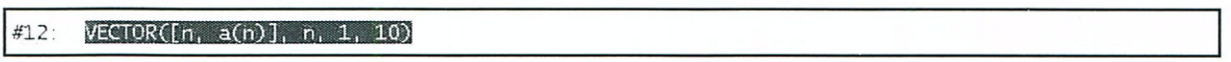
Pontosítanunk kell egy korábbi állításunkat. Azt mondtuk, hogy a **DERIVE** úgy jelenít meg vektorokat, hogy azok minden tagját ábrázolja. Ez az egy, illetve kettőnél több tagú

vektorokra igaz. A kéttagú vektorokat pontként, illetve mint parametrikusan definiált függvényeket értelmezi.

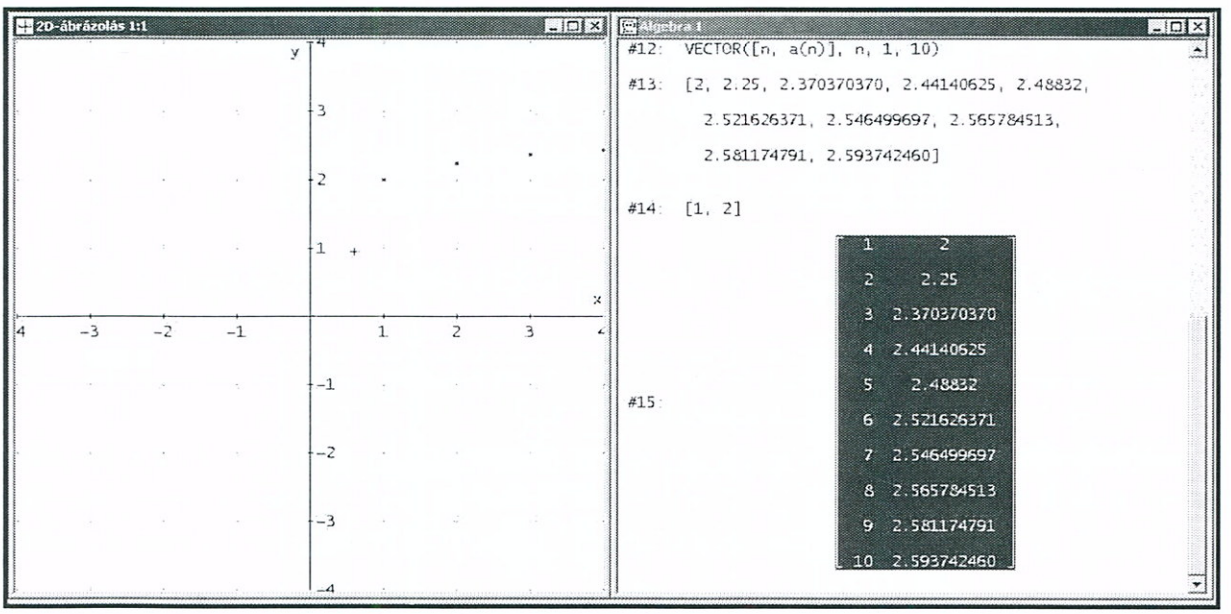
Hogy pontok családjaként ábrázoljuk #12-t, kattintsunk duplán a kifejezés elé balra. (Ez a **Szerkesztés > Kifejezés** menüpont egy alternatívája.)



Változtassuk a behívott függvény első tényezőjét $a(n)$-ről $[n, a(n)]$-re.

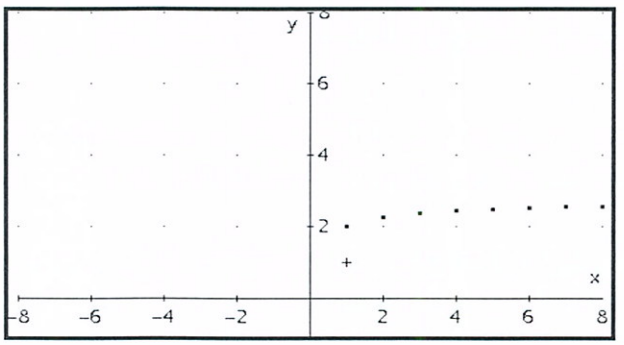


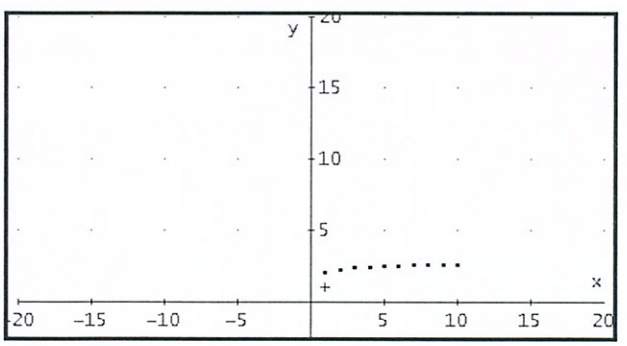
Számítsuk ki a kifejezés közelítő értékét, majd ábrázoljuk.



A tíz pont családja úgy jelenik meg, mint egy mátrix, melynek két oszlopa és tíz sora van. Az első oszlop az n értékeit tartalmazza, míg a második a neki megfelelő $a(n)$ értékeket.

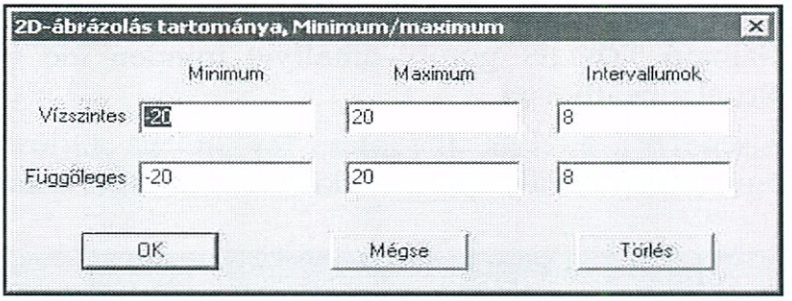
Nyissuk a képmezőt a **Távolítás** gombra kétszer rákattintva.





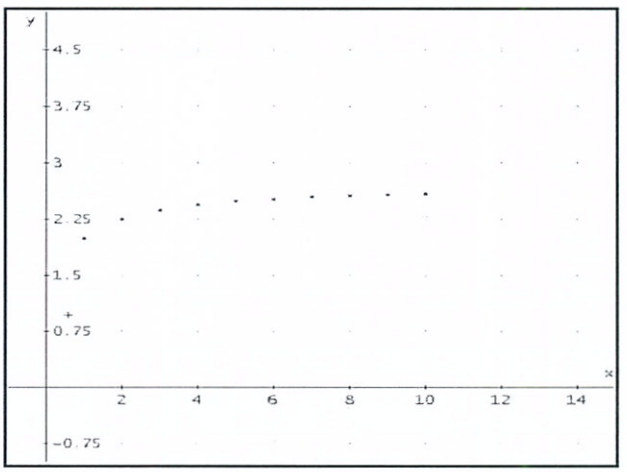
Ez a példa alkalmasnak látszik arra, hogy átállítsuk az ábrázolási tartományt, vagyis a **Vízszintes** és a **Függőleges** koordinátáknak célszerű **Minimum** és **Maximum** értéket adjunk manuálisan.

Az ábrázolási tartomány átállításához nyissuk meg a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Minimum/maximum** menüpontot.



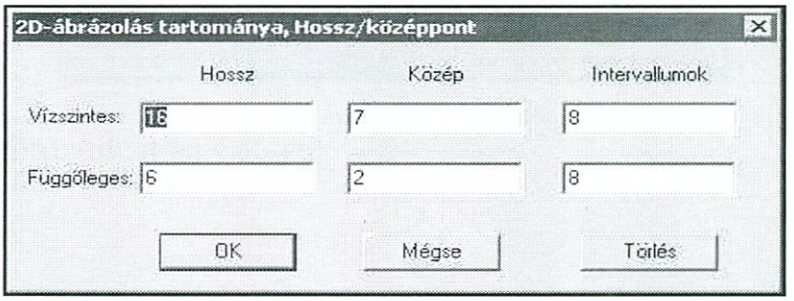
n a vízszintes tengelyen kerül megjelenítésre. Minthogy értékei 1, ...,10 közé esnek, válasszuk a -1-et és a 15-öt **Minimum** és **Maximum** értékként a **Vízszintes** koordinátán. Mivel $a(n)$ a függőleges tengely mentén kerül ábrázolásra és a #15-ből ítélve értékei 2 és 3 közé esnek, hogy a vízszintes tengely még látható maradjon, legyen -1 és 5 a minimum és maximum értéke a függőleges koordinátának.

Írjuk be a -1-et és a 15-öt a **Vízszintes** sor első két helyére, majd -1-et és 5-öt a **Függőleges** sor első két helyére. Lépjünk ki a dialógus ablakból az OK gombbal.



Az ábrázolási terület egy másik beállítási lehetősége a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Hosszúság/középpont** ablakban.

Nyissuk meg a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Hosszúság/középpont** ablakot.



A 2D-ábrázolás tartománya párbeszédablak megjeleníti az ábrázolt vízszintes és függőleges tengely teljes jelenlegi hosszát, az ábrázolt terület középpontjának koordinátáit és a rácsosztások számát mindkét irányban.

A **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Minimum/maximum** és a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Hosszúság/középpont** két különböző lehetőség, hogy a 2D ábrázolás ablak látható tartományát beállítsuk. Az, hogy melyiket választjuk, függhet a megoldandó problémától és/vagy attól, hogy melyiket részesítjük előnyben. Mindkét párbeszédablakban található TÖRLÉS gomb, amellyel minden ide vonatkozó paramétert visszaállíthatunk a gyári alapbeállításra.

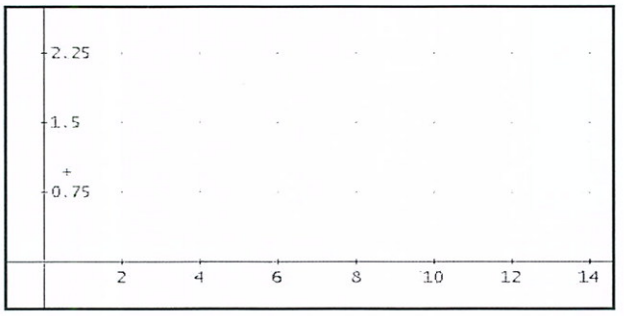
Lépjünk ki az dialógusablakból változtatás nélkül a MÉGSE gombot használva.

Következőként ábrázoljuk az $a(n)$ sorozat első száz pontját. Automatikus másolással illesszük a #12-t a beviteli sorba (jelöljük ki a #12-t és használjuk az **F2** majd az **F3** gombokat). Írjuk át a függvény negyedik argumentumát 10-ről 100-ra.

```
#16: VECTOR([n, a(n)], n, 1, 100)
```

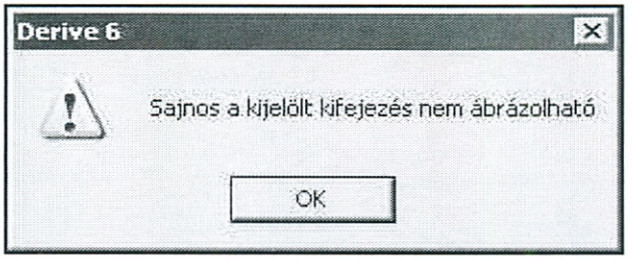
Nem fontos egyszerűsítenünk most, hiszen az ábrázoló ablak képes az egyszerűsítetlen kifejezéseket kezelni.

Töröljük az ábrázoló ablakból a pontokat. Használjuk az **Utolsó ábra törlése** gombot egyszer rákattintva.



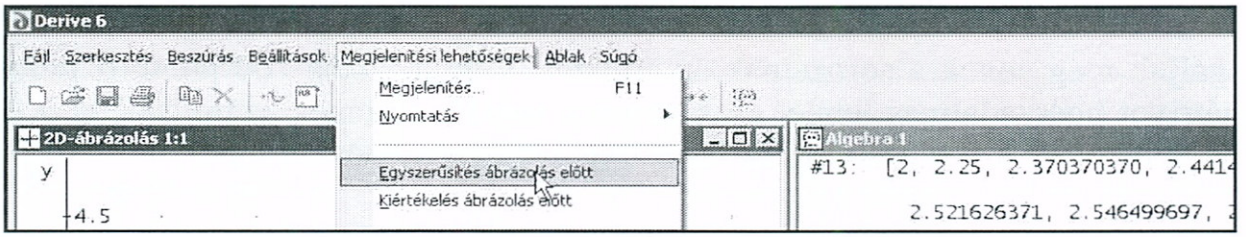
A vonalak családjával ellentétben a pontok családját egy objektumként kezeli a **DERIVE**. Az **Utolsó ábra törlése** utasítás egyszeri alkalmazása tehát elegendő az egyszerre létrehozott összes pont törlésére (#15 kifejezés). De várjunk csak! Egyetlen pont visszamaradt. Ha szemügyre vesszük, vagy megnézzük a grafikus keresztet, látjuk, hogy a pont koordinátái (1,2). Ezt a pontot hoztuk létre tesztpontként, még mielőtt a sorozatot megjelenítettük volna.

Töröljük a pontot a ⊠-vel, és ábrázoljuk a #16 kifejezést a **Kifejezés ábrázolása** gombbal .



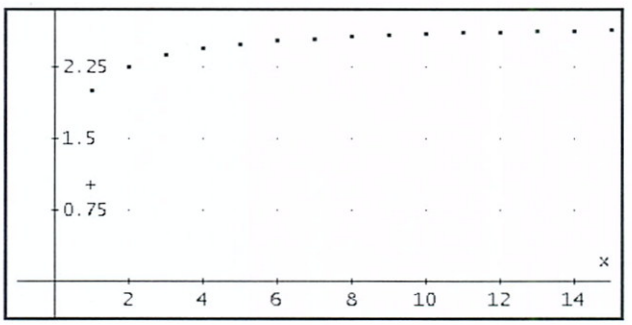
Ahhoz, hogy egyszerűsítetlen kifejezéseket is tudjunk ábrázolni, át kell állítanunk a következő kapcsolót.

A hibaüzenetet töröljük az OK–val és tegyük aktívvá a **Megjelenítési lehetőségek > Egyszerűsítés ábrázolás előtt** kapcsolót.



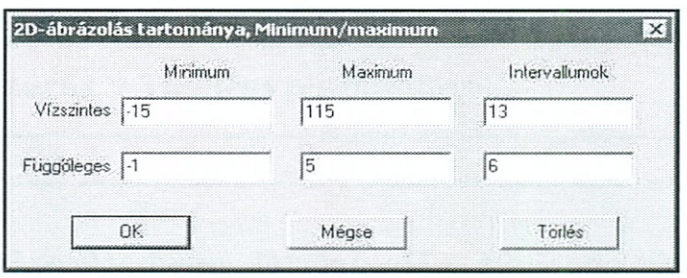
Másik lehetőségként alkalmazhattuk volna a **Megjelenítési lehetőségek > Kiértékelés ábrázolás előtt** kapcsolót.

Jelenítsük meg a száz pontot a **Kifejezés ábrázolása** gombbal.

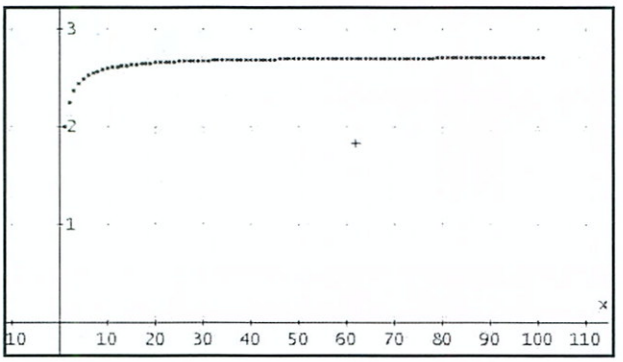


A legtöbb pont az ábrázolási területen kívül esik. Ahhoz, hogy minden pont látható legyen, megfelelően át kell állítanunk az ábrázolási tartományt.

Válaszuk az ábrázolási tartományhoz az alábbi értékeket:



Erősítsük meg a változtatást az OK-val



Ha az **Intervallum** mezőben megfelelő értékeket választunk, biztosíthatjuk, hogy a tengelyek osztásánál egyszerű számok jelennek meg. A **Vízszintes intervallumok** mezőben beállított 13 a tized része a **Vízszintes minimum** (-15) és **Vízszintes maximum** (115) távolságnak. Így a tengelyosztás a tíz többszöröseit adja.

Vizsgáljuk meg ennek a sorozatnak az értékeit. Végignézni a 100 ponthoz tartozó 100 soros mátrixot hosszadalmas lenne, csak minden tizedik elemnek számítsuk ki a közelítő értékét és ábrázoljuk azt, lépésközként 10-et írva a függvény bevitelekor.

Másoljuk át a #16-ot és a lépték értékeként tegyük a **VECTOR** kifejezéshez a 10-et. Zárjuk a beviteli sor **Beírás és Kiértékelés** gombjával.

```
#17: VECTOR([n, a(n)], n, 1, 100, 10)
```

1	2
11	2.604199011
21	2.656263213
31	2.675696305
41	2.685856347
51	2.692102208
61	2.696330496
71	2.699382869
81	2.701689991
91	2.703495102

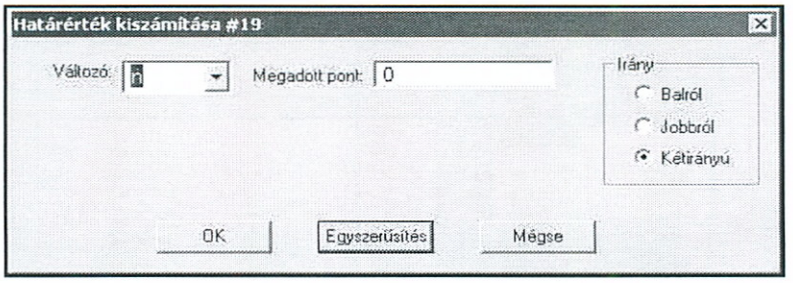
```
#18:
```

Vajon ezek a számok közelítenek egy adott határértékhez? Számítsuk ki $a(n)$ határértékét az n tart a végtelenhez esetére.

Hogy kiszámítsuk $a(n)$ határértékét, először vigyük be a kifejezést, mellyel definiáljuk az $a(n)$ sorozatot.

```
#19: a(n)
```

Használjuk a határérték operátort a **Határérték meghatározása** lim gombra kattintva, vagy megnyitva az **Analízis > Határérték** mezőt.

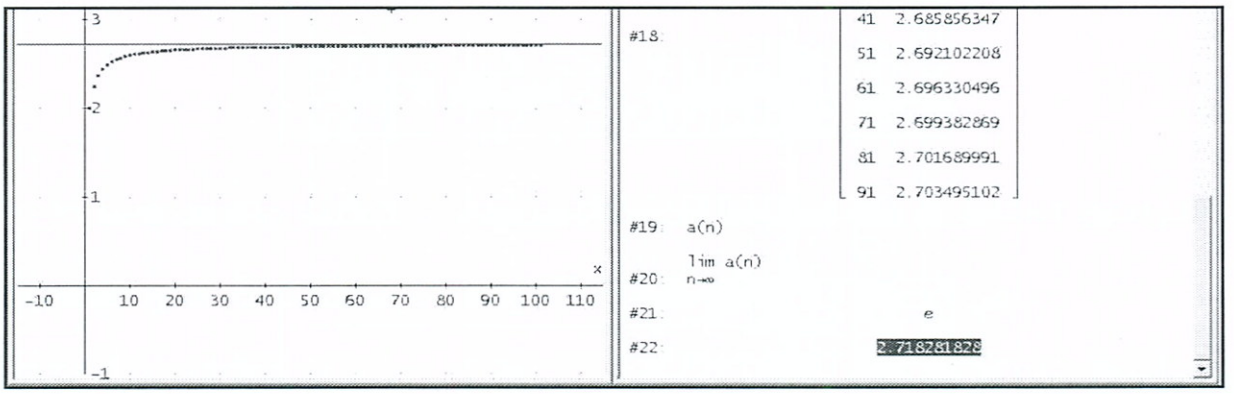


A Határérték kiszámítása párbeszédablakban csak egyetlen paramétert kell megváltoztatnunk, azaz az alapbeállítás szerinti zéró értéket kell célunknak megfelelően végtelenre állítani.

Lépjünk a **Megadott pont** beviteli mezőbe a TAB ↹ billentyűvel, írjuk fölül a 0-t az **inf**-fel (végtelen), és zárjuk a dialógus ablakot az EGYSZERŰSÍTÉS gombbal.

Számítsuk ki a kapott eredmény közelítő értékét és ábrazoljuk a hozzá tartozó vízszintes tengelyen.

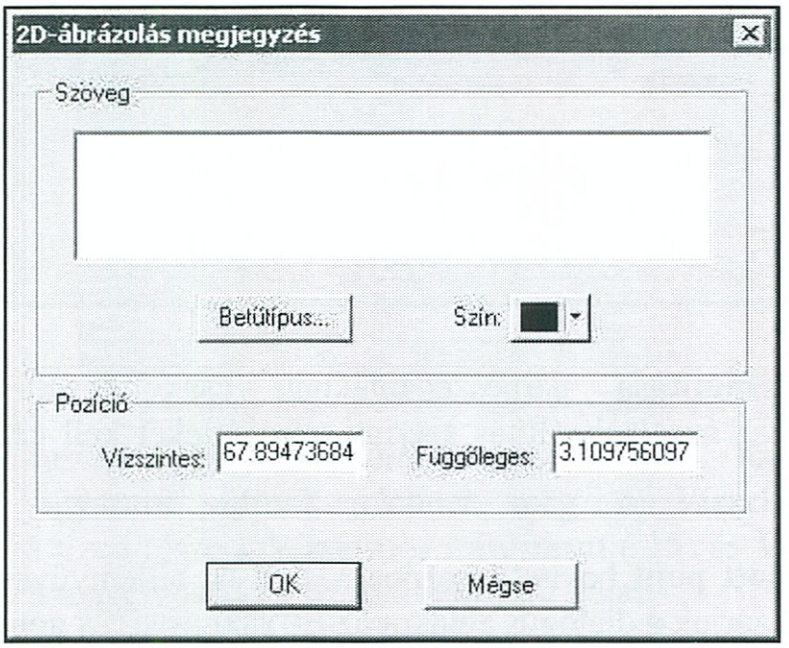
Számítsuk ki #21 közelítő értékét és ábrazoljuk a kapott számot.



Egy szám, mondjuk a ábrázolása az $y = a$ megjelenítésének felel meg.

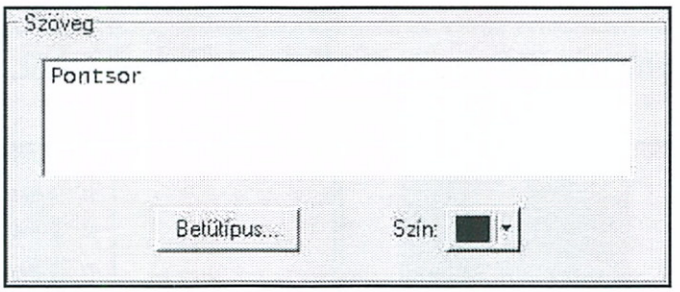
Helyezzünk be egy idevágó megjegyzést.

Kezdjük a megjegyzés bevitelét az ábrázolás ablak **Megjegyzés beszúrása** gombjára kattintva, vagy a **Beszúrás > Megjegyzés** utasítással.

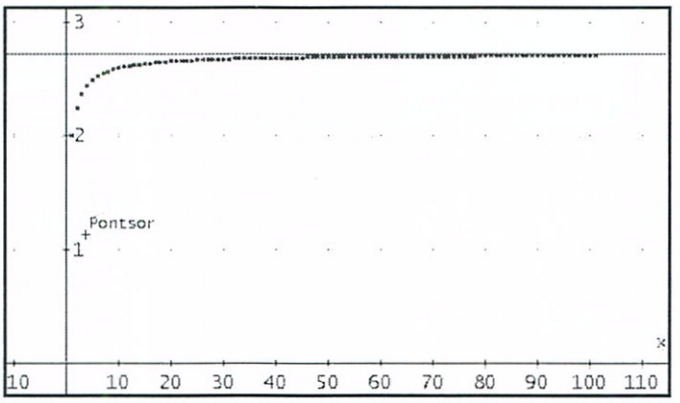


A **Szöveg** mezőbe beírhatunk szöveget, állíthatjuk a betűk stílusát, típusát, méretét, valamint a színét. A **Pozíció** mező, melyben most a jelenlegi keresztkoordináta értékek láthatók, jelzi azt a pozíciót, ahová a szövegmező bal felső sarka kerül majd.

💻 Kezdjük begépelni a következőket:

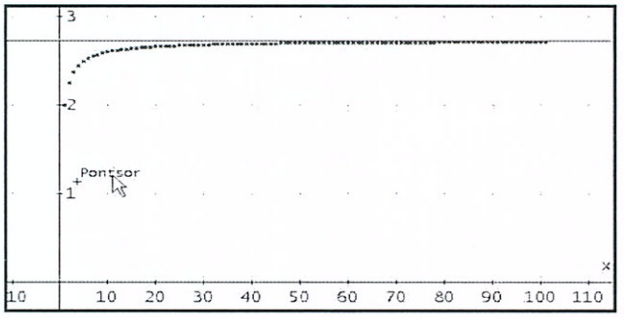


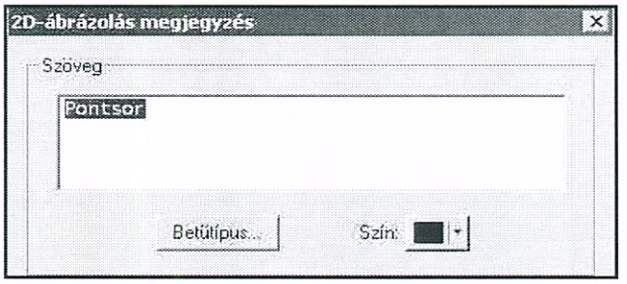
💻 Nézzük, hogy tudunk új sort kezdeni? Próbálkozzunk az ENTER billentyűvel ↵.



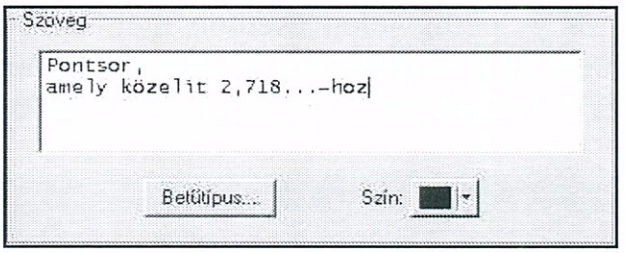
Az ENTER billentyű ↵ bezárta a párbeszédablakot, ahelyett, hogy új sort nyitott volna.

💻 A megjegyzésünk szerkesztésének folytatásához kattintsunk rá duplán.

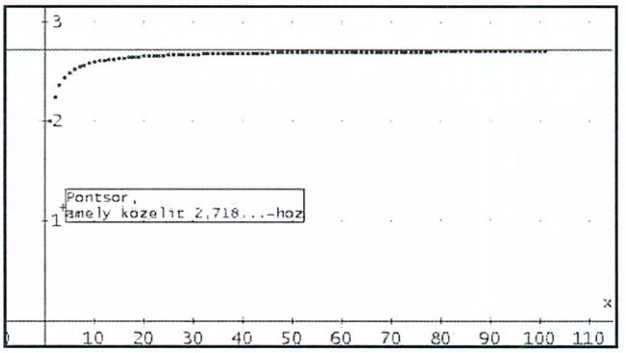




A kijelölést vagy az egérrel kattintva, vagy valamelyik nyíl billentyűt lenyomva eltávolíthatjuk. Új sor indításához használjuk a CTRL + ↵ billentyűket majd fejezzük be a megjegyzésünket ekképpen:

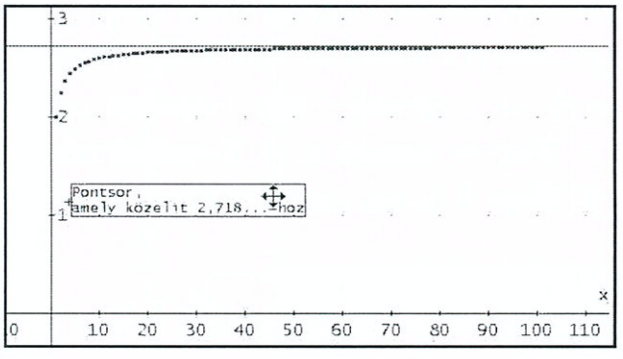


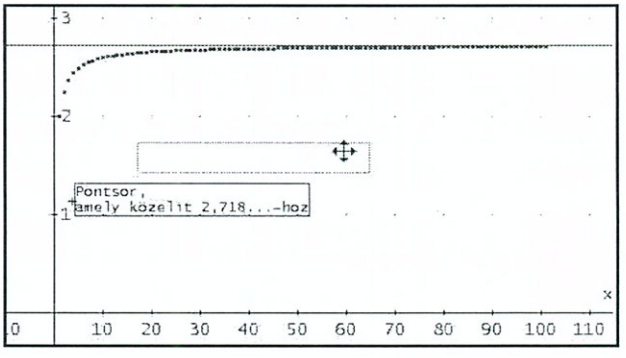
Lépjünk ki a dialógusablakból a ↵vagy az OK gombbal.



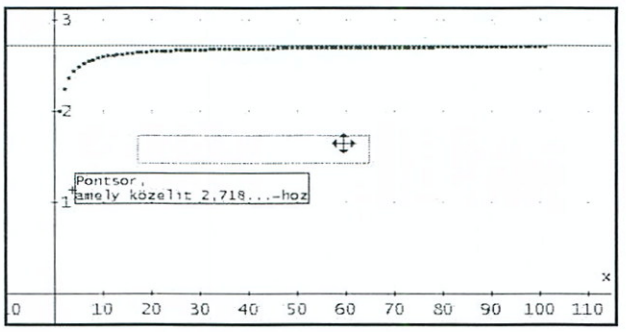
A következőképpen változtathatjuk meg a bevitt megjegyzés pozícióját:

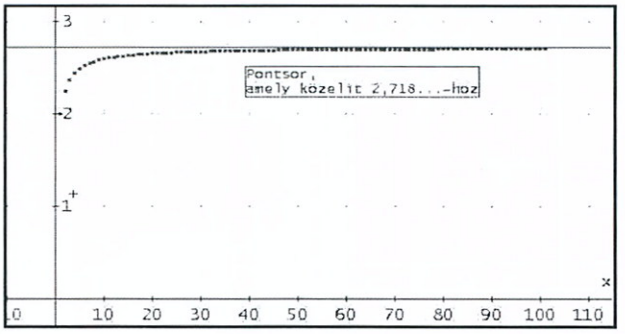
A megjegyzés áthelyezéséhez vigyük az egérkurzort a szövegmező fölé (bal oldali kép), majd a bal egérgombot nyomjuk le és tartsuk nyomva. Vigyük így a szövegmezőt a kívánt pozícióba.





Amikor elértük a kívánt pozíciót, engedjük fel az egérgombot.





Jegyezzük meg, hogy a beágyazott ábránkhoz fűzött megjegyzés betűmérete változatlan maradt. Ez bizonyos korlátokat szab a megjegyzésekkel ellátott ábrák beágyazásához.

A tengelyek elnevezése x és y, pedig jelen esetben megfelelőbb lenne az n és az a(n) elnevezés. Ezeket, illetve egyéb, a tengelyekre vonatkozó paramétereket a **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Tengelyek** dialógusablakban állíthatjuk be.

Végezzünk gyakorlatokat a **VECTOR** függvénnyel, majd tanulmányozzuk a vele összefüggő **TABLE** függvényt.

Zárjuk be az algebra ablakot (és vele együtt az ábrázolási ablakot is), és nyissunk egy új algebra ablakot a **Fájl > Új munkalap** menüponttal. Tegyük teljes képernyőssé, majd írjuk be a $\sin x$-et.

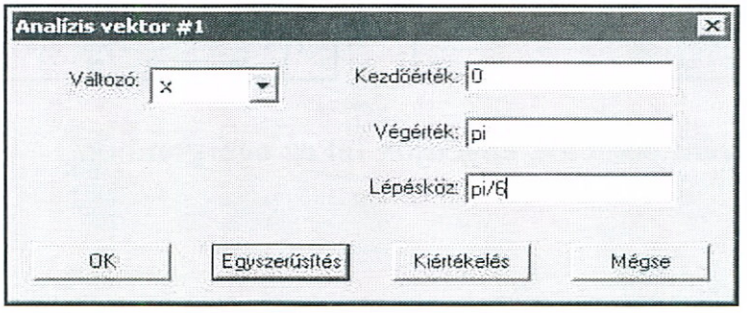
```
#1:  SIN(x)
```

Alkalmazzuk rá a **VECTOR** függvényt az **Analízis > Vektor** menüpont segítségével. Fogadjuk el az alapbeállítás argumentumait és zárjuk a párbeszédablakot az EGYSZERŰSÍTÉS paranccsal, majd kattintsunk a ≈ gombra.

```
#2:  VECTOR(SIN(x), x, 1, 10, 1)
#3:  [SIN(1), SIN(2), SIN(3), SIN(4), SIN(5), SIN(6), SIN(7), SIN(8), SIN(9), SIN(10)]
```

Használjuk újra a **VECTOR**-t a #1-re, ezúttal x kiterjesztését vegyük 0-tól π-ig, $\pi/6$-os lépésközzel.

Jelöljük ki $\sin x$-et. Alkalmazzuk a **Analízis > Vektor** utasítást, A **Kezdőérték** legyen 0, a **Végérték** legyen pi és a **Lépésköz**-t vegyük pi/6-nak.



Figyeljük meg, hogy a π-hez hasonló nevesített állandók beírhatók névvel is ezekbe a beviteli mezőkbe.

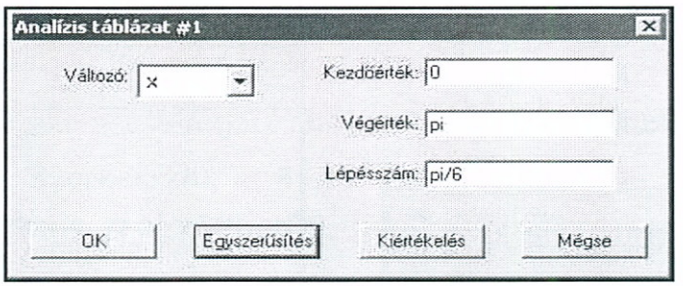
Lépjünk ki az EGYSZERŰSÍTÉS utasítással.

#4: $\text{VECTOR}\left(\text{SIN}(x),\ x,\ 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{6}\right)$

#5: $\left[0,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right]$

Alkalmazzuk ezután a **TABLE** függvényt ugyanezekkel a tényezőkkel.

Jelöljük ki a $\sin x$-et és indítsuk az **Analízis > Táblázat** menüpontot. A felsorolt paramétereket állítsuk át 0-ra, pi-re és pi/6-ra.



Lépjünk ki a nem alapértelmezett KIÉRTÉKELÉS gombbal.

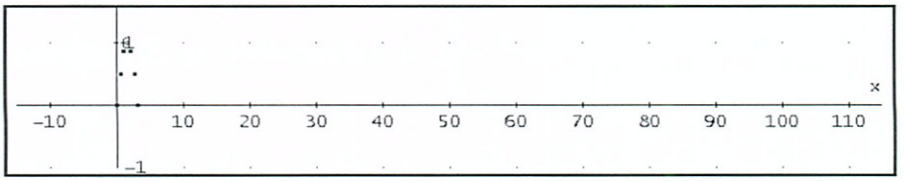
#6: $\text{TABLE}\left(\text{SIN}(x),\ x,\ 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{6}\right)$

#7:

0	0
0.5235987755	0.5
1.047197551	0.8660254037
1.570796326	1
2.094395102	0.8660254037
2.617993877	0.5
3.141592653	0

Egy két oszlopból álló mátrixot kapunk. Az első oszlop x értékeit tartalmazza és a második oszlopban láthatjuk $\sin x$ értékeit. Az ilyen táblázat közvetlenül ábrázolható:

Nyissunk egy ábrázolás ablakot, és a gombbal jelenítsük meg a táblázatunkat.



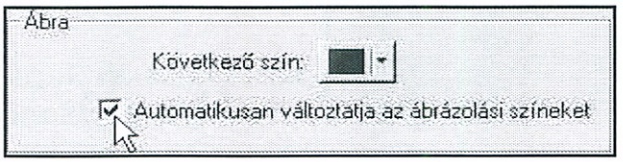
Az ábrázolási tartomány ugyanaz maradt, mint ami az előző példában volt. Állítsuk vissza az ábrázolási tartományt az alapbeállításra.

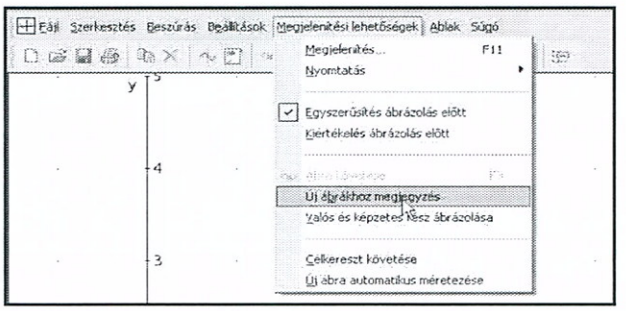
Nyissuk meg a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Hosszúság/középpont** menüt és használjuk a TÖRLÉS gombot. Végül mentés nélkül zárjunk be minden ablakot.

Nagyon hasznos funkció lehet, ha minden egyes ábrázolásnál automatikusan megjelenik a görbe egyenlete. Ez a lehetőség a **Megjelenítési lehetőségek > Új ábrákhoz megjegyzés** menüpont alatt szabályozható.

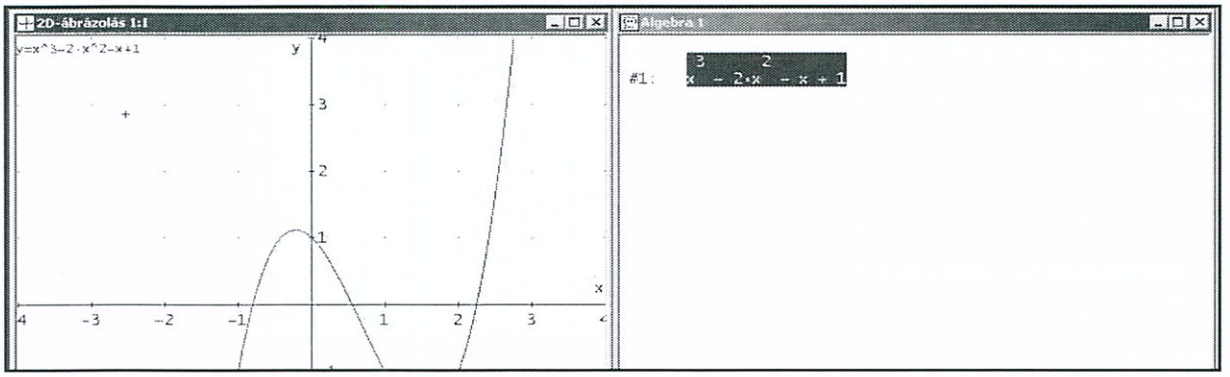
Nyissunk egy új dokumentumot a **Fájl > Új munkalap** paranccsal, majd írjuk be a $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ polinomot a következő formában: $y=x\text{^}3-2x\text{^}2-x+1$.

Helyezzük a 2D-ábrázolás ablakot az algebra ablak mellé, állítsuk vissza az automatikus színváltoztatást a **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Szín** menüponttal (bal oldali kép), aktiváljuk a **Megjelenítési lehetőségek > Új ábrákhoz megjegyzés** opciót,...





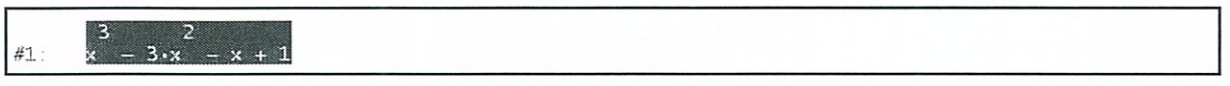
majd jelenítsük meg a polinomunkat.



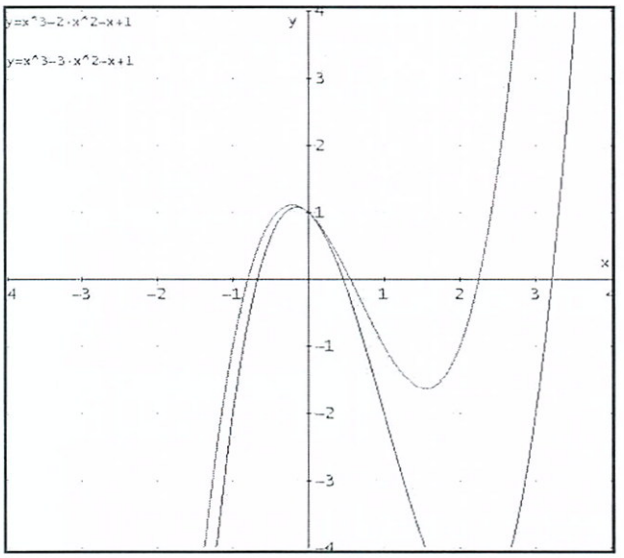
A görbe egyenlete automatikusan megjelent az ábrázolási ablak bal felső sarkában. Színe igazodik az ábra színéhez.

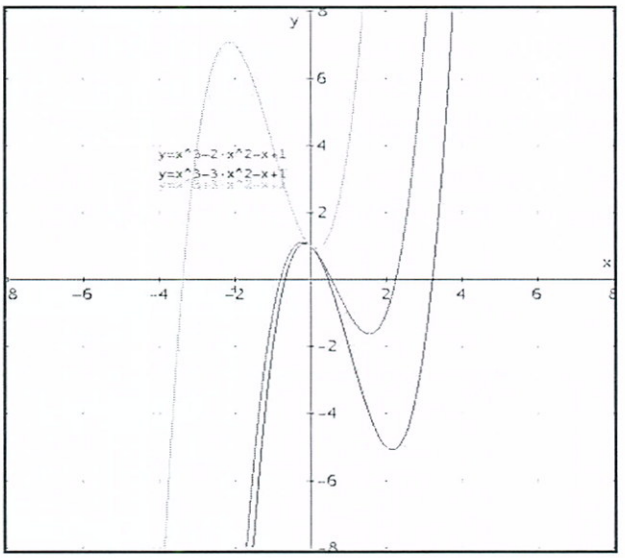
Próbáljuk x^2 együtthatóját megváltoztatni.

Szerkesszük át #1-et $y = x^3 - 3x^2 - x + 1$ formába a **Szerkesztés > Kifejezés** utasítással.



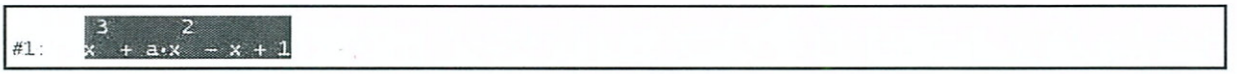
Ábrázoljuk a kifejezést (bal oldali kép). Majd változtassuk meg x^2 együtthatóját -3-ról 3-ra, és ezt is ábrázoljuk. Végül távolodjunk el az **F10** billentyű lenyomásával.



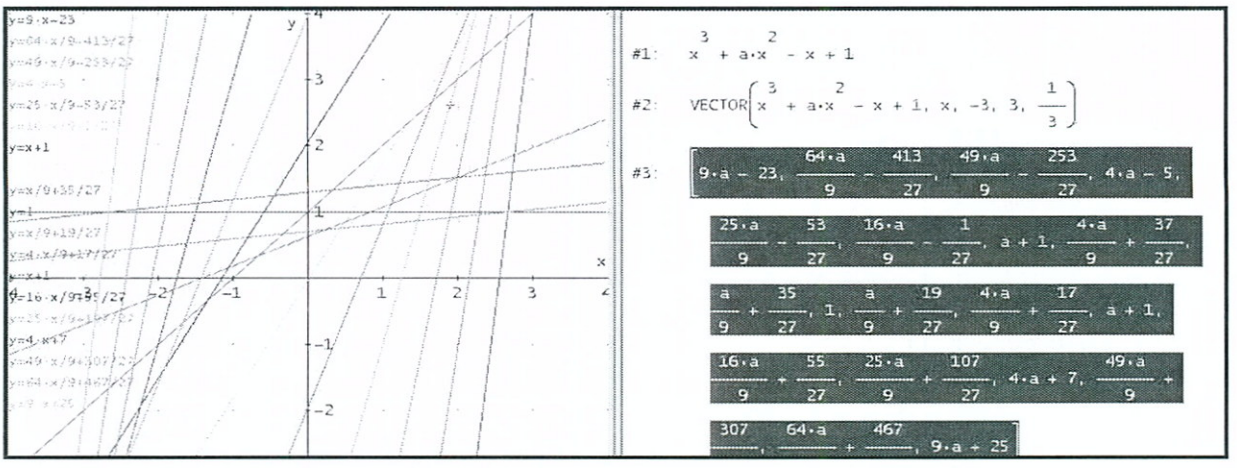


Generáljuk a görbéknek azt a családját, ahol x^2 koefficiensének értéke -3 és +3 között változik 1/3 lépésközzel. Szerkesszük át #1-et $y = x^3 + a \cdot x^2 - x + 1$ formába (azaz x^2-hez rendeljünk egy általános a együtthatót), majd alkalmazzuk a **VECTOR** függvényt a megfelelő paraméterekkel.

Szerkesszük át a #1 kifejezést.



Alkalmazzuk az algebra ablak **Analízis > Vektor** utasítását úgy, hogy vegyük a **Kezdőérték**et -3-nak, a **Végérték**et 3-nak és válasszuk a **Lépésköz**t 1/3-nak. Lépjünk ki az EGYSZERŰSÍTÉS gombbal és ábrázoljuk az eredményt. (Szándékosan ne változtassunk a **Változó** mezőbeli beállításon.)

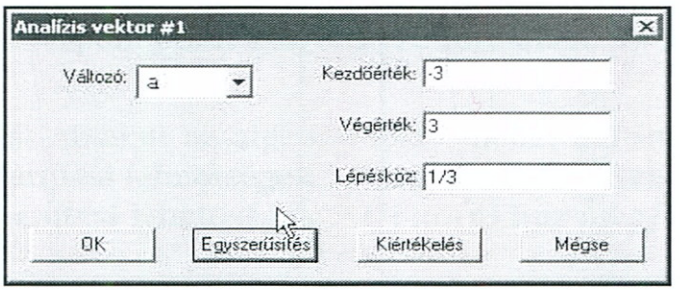


Mit látunk? Ez egyenesek családjának tűnik. Ha megnézzük az algebra ablakbeli kifejezéseket, megoldódik a rejtély. Ezek az $y = f(a)$ egyenlet egyenesei és nem az általunk várt görbék. Ábrázoláskor az a változót, mint a vízszintes koordinátát értelmeztük.

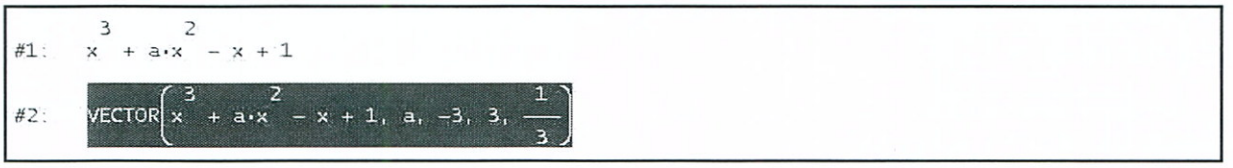
Ennek a hibának az oka az, hogy az **Analízis>Vektor** dialógus ablak a legelöl álló belső változót tekinti változónak, ezért az x -et használja index-változóként nem az a -t, amit mi szerettünk volna.

💻 Töröljük az összes ábrát és a #2 és #3 kifejezéseket (a megjegyzések törléséhez használjuk a **Szerkesztés > Összes megjegyzés törlése** menüpontot), majd kapcsoljuk ki a **Megjelenítési lehetőségek > Új ábrákhoz megjegyzés** opciót.

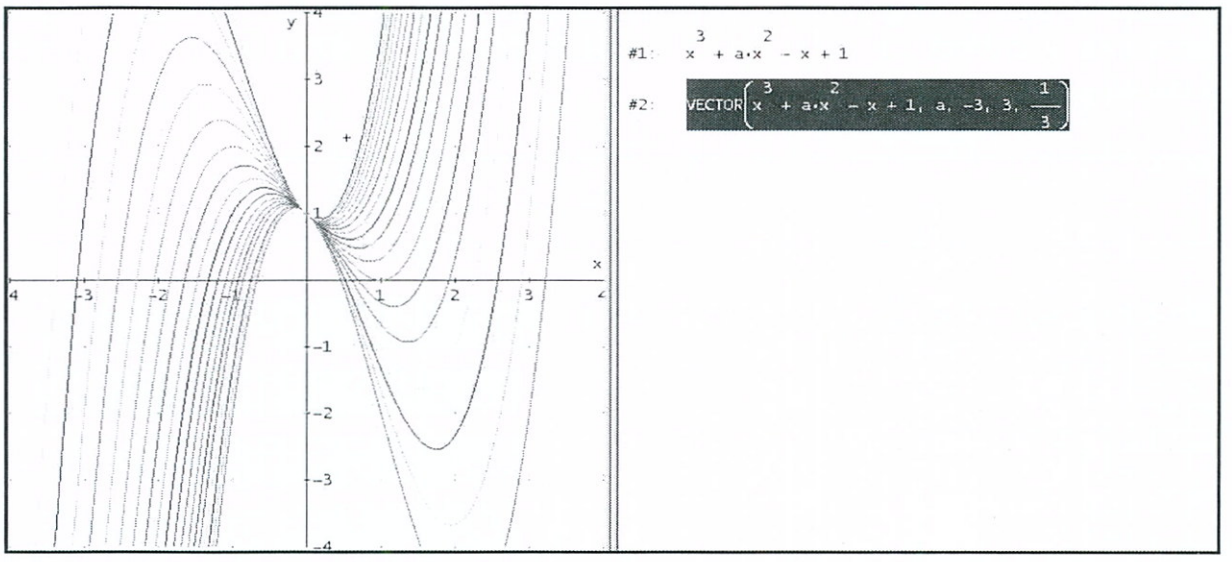
💻 Nyissuk meg újra a **Analízis > Vektor** ablakot és ezúttal jelöljük ki a -t változóként.



💻 Hogy ne kapjunk valami áttekinthetetlenül terjedelmes kifejezést, ne használjuk az egyszerűsítést, sem a közelítő számítást. Lépjünk ki az OK-val a dialógusablakból.



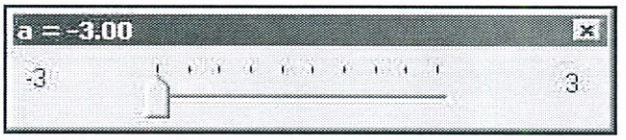
💻 Állítsuk be, hogy a függvény-ábrázolónk elfogadjon egyszerűsítetlen kifejezéseket is. Alkalmazzuk az **Megjelenítési lehetőségek > Egyszerűsítés ábrázolás előtt** utasítást és ezután jelenítsük meg a #2 kifejezést.



Az a paraméter hatását a függvény alakjára legjobban dinamikus módon lehet bemutatni az alábbi módszerrel:

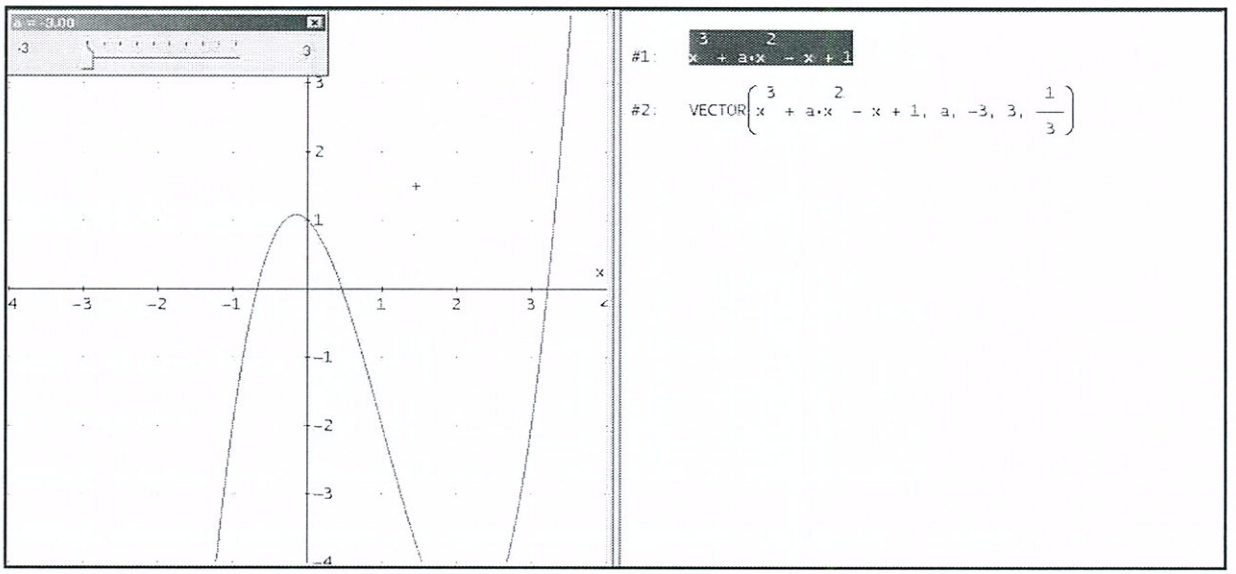
💻 Töröljünk ki minden ábrát, majd válassza a **Beszúrás > Vonalzó** menüpontot.

A **Változó neve** mezőbe írjuk be az *a* változót, a **Minimum érték** mezőbe írjunk -3-at, a **Maximum érték** mezőbe 3-at, az **Intervallumok** mezőbe pedig 9-et.



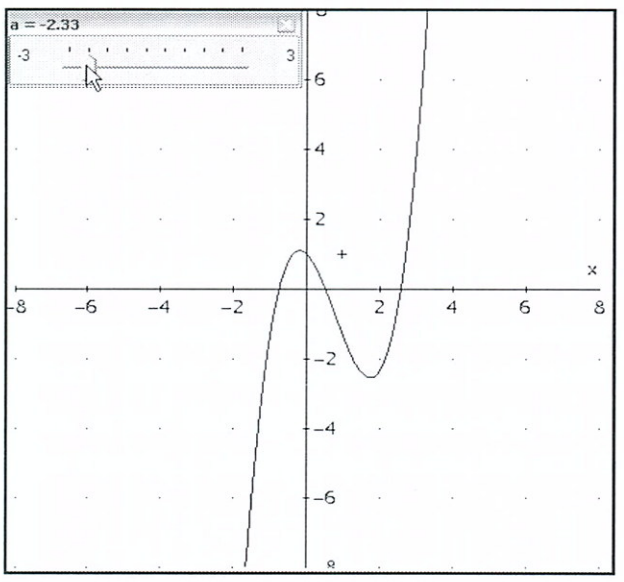
A vonalzó az ábrázolási ablak bal felső sarkában található, a mutató a minimális -3 értékre mutat. Az *a* jelenlegi értéke tehát számadat.

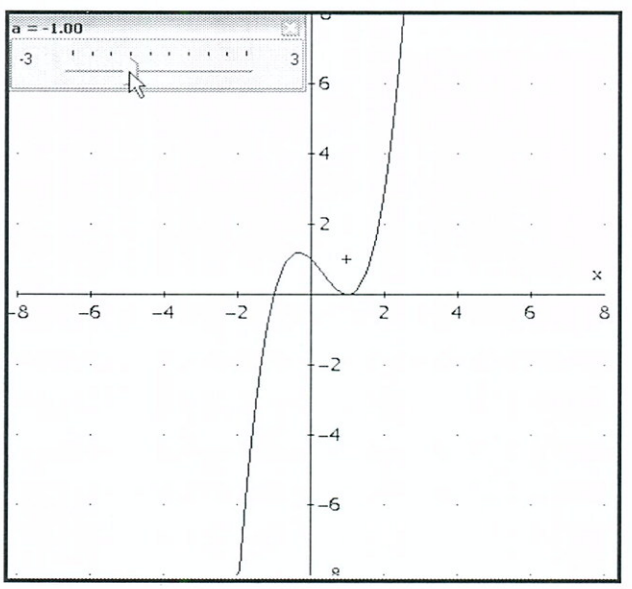
Jelöljük ki, és ábrázoljuk az #1 kifejezést.



Ez a minimális *a*=-3-hoz tartozó ábra. Ahhoz, hogy az *a* különböző értékeihez tartozó grafikonokat is felrajzolhassuk, mozgassuk az egér, vagy a jobbra és balra nyilak segítségével a vonalzón levő mutatót.

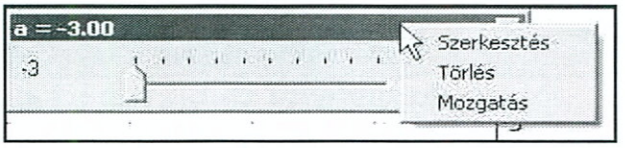
Mozgassuk a vonalzó mutatóját. Ha az egeret használjuk, a grafikon újra rajzolásához engedjük fel az egérgombot.



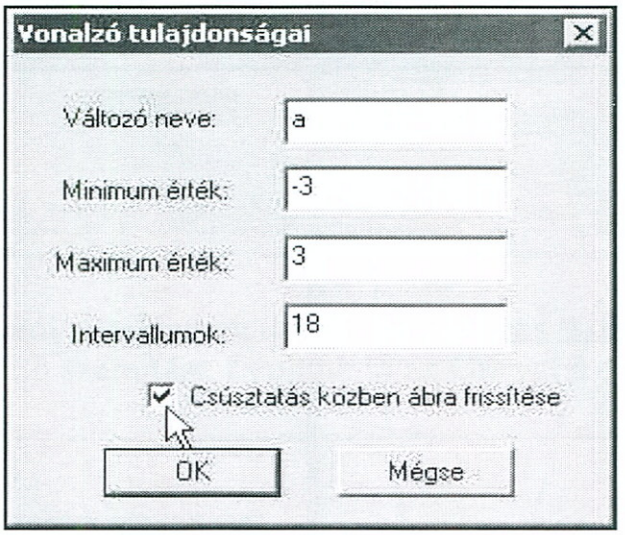


A vonalzó szerkesztéséhez használjuk a jobb egérgomb megnyomásával előtűnő helyi menü **Szerkesztés** parancsát.

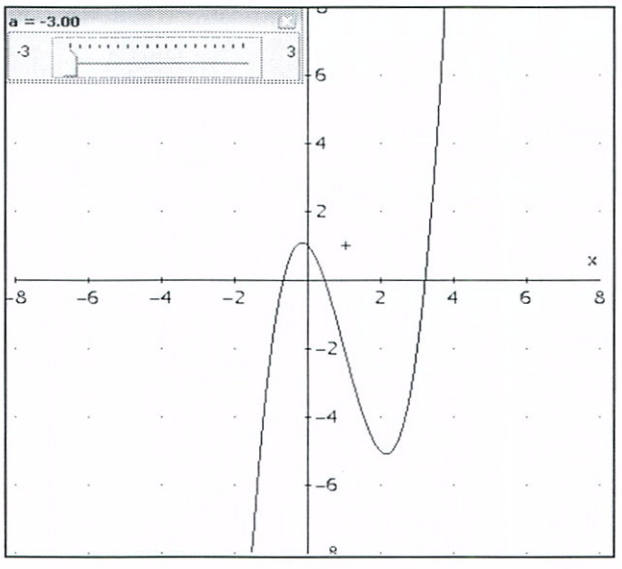
Mozgassuk az egeret a vonalzó fölé, és nyomjuk meg az egér jobb gombját.

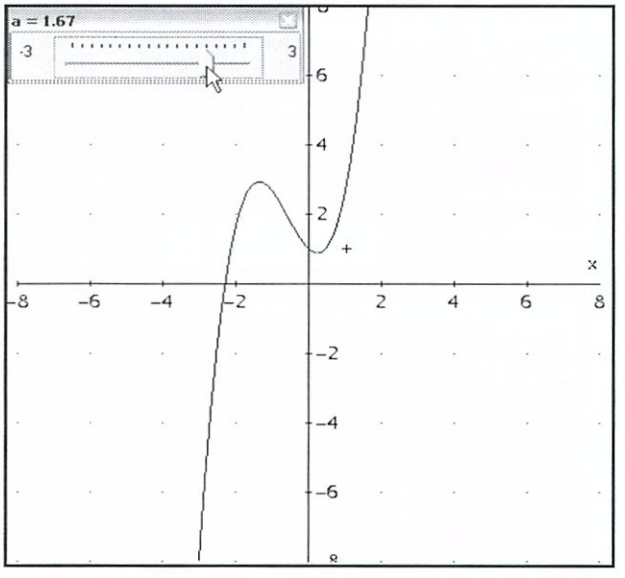


Változtassuk az **Intervallumok** mezőben levő számot 18-ra, és kapcsoljuk be a **Csúsztatás közben ábra frissítése** opciót.



Mozgassuk a vonalzó mutatóját, és figyeljük meg az ábra folyamatos frissítését az ablakban.





Egy ábrázolási ablakon belül több vonalzót is használhatunk. Viszont minden vonalzónak más változó nevet kell adnunk. A vonalzó bezárásához kattintsunk az ablak jobb felső sarkában levő gombra, vagy a jobb egérgomb megnyomásával előhívott helyi menüből válasszuk a **Törlés** parancsot. Az összes vonalzó bezárásához használjuk a **Szerkesztés > Minden vonalzó törlése** menüpontot.

Lépjünk ki mentés nélkül a **DERIVE**-ból.

Összefoglalás

Algebra ablak

vagy **Analízis > Határérték** ..... kijelölt kifejezés határértékének meghatározása

Analízis > Vektor ..... vektor létrehozása a kijelölt kifejezésből

Analízis > Táblázat ..... kijelölt kifejezésből táblázat generálása

Kifejezés szerkesztő eszköztár

:= ..... függvény megadása, vagy változóhoz érték hozzárendelése

..... kifejezés és az egyszerűsített kifejezés beírása

2D- ábrázolás ablak

vagy **Beszúrás > Megjegyzés** ..... új megjegyzés beszúrása a grafikus ablakba

Szerkesztés > Összes ábra törlése ..... összes ábra törlése a grafikus ablakból

Beszúrás > Vonalzó ..... vonalzó beszúrása

Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés ..... tengelyek, rácspontok, szín, pontok beállítása

Megjelenítési lehetőségek > Egyszerűsítés ábrázolás előtt .....

..... automatikus egyszerűsítés ábrázolás előtt

Megjelenítési lehetőségek > Kiértékelés ábrázolás előtt ..... automatikus kiértékelés ábrázolás előtt

Megjelenítési lehetőségek > Új ábrákhoz megjegyzés ..... automatikus ábracímkézés

Függvények

VECTOR ..... vektor generálása

TABLE ..... táblázat generálása

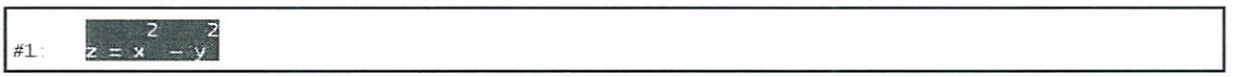
7. fejezet

Kísérletek a térben

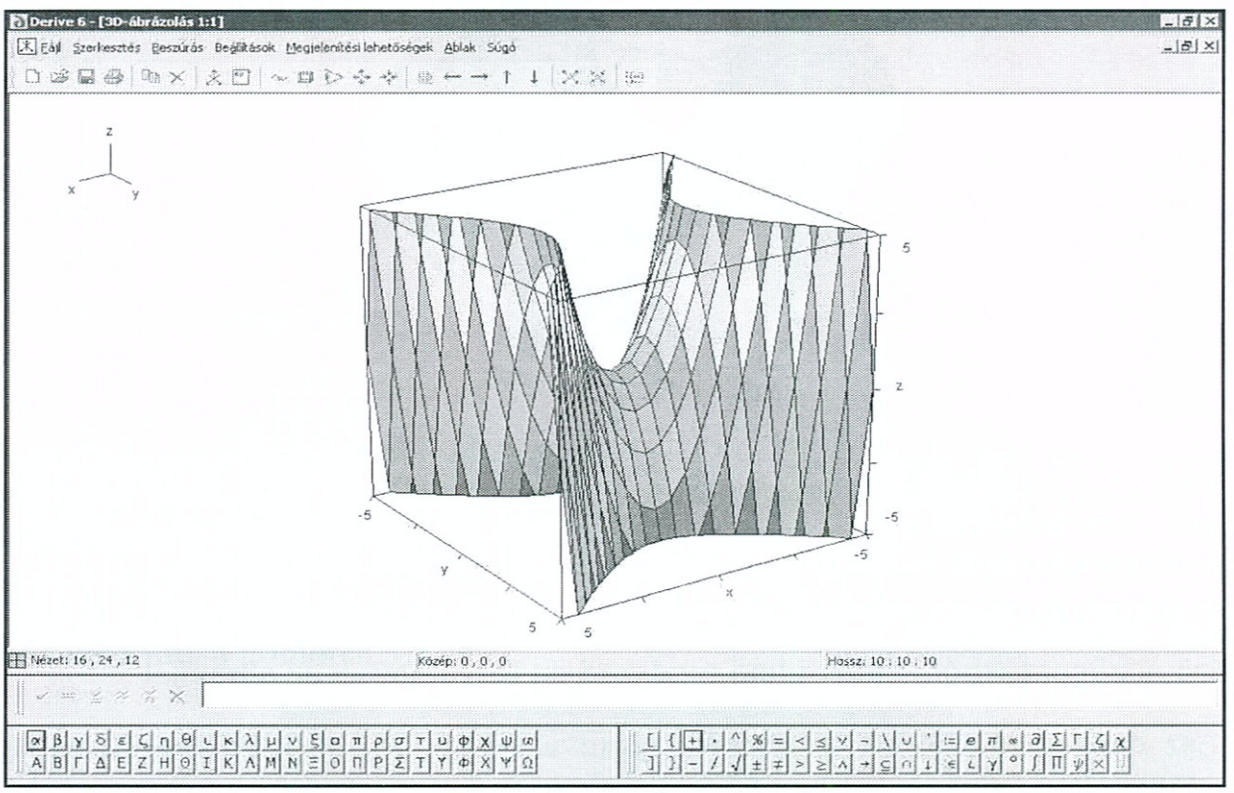
A 3D-ábrázolás a **DERIVE** igen látványos felhasználási lehetősége. A kétváltozós függvényeket – $z = f(x, y)$ – háromdimenziós térben elhelyezkedő felületekként ábrázolja. Ez lehetővé teszi a 3-dimenziós megjelenítést. Ebben a fejezetben megismerkedünk a 3D-ábrázolás alapvető jellemzőivel és technikájával.

Ábrázoljuk a következőt: $z = x^2 - y^2$.

Indítsuk a **DERIVE**-ot alapbeállítással. Írjuk be az algebra ablakba a $z=x^2-y^2$ egyenletet.



Nyissunk egy 3D ábrázolás ablakot a **3D-ábrázolás ablak** gombbal és ábrázoljuk az **Ábrázolás** utasítást kiadva.

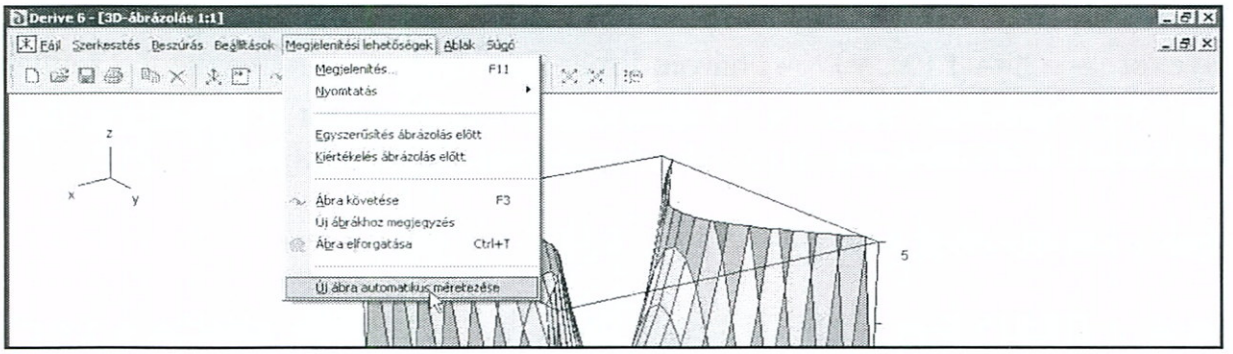


Ez a harmadik ablaktípus, amit a **DERIVE**-ban használhatunk. Természetesen ennek megfelelően a parancs eszközsor eltér a 2D-ábrázolás eszközsorától. A menüsor hasonló, mint a 2D-ábrázolás ablakban, de a bennük található utasítások természetszerűen különböznek.

Az ábra egy felcímkézett dobozban jelenik meg. A bal felső sarokban található x, y és z pozitív értékű tengelyrendszer segít az ábra tájolásában. A gyári alapbeállítás egy 10 x 10 x 10-es kocka, melynek élei $-5 \le x \le 5, -5 \le y \le 5$, és $-5 \le z \le 5$. A kiválasztott ábrázolási tartomány akkor a legmegfelelőbb, ha x és y összes pontja látható. Ezért z értékét

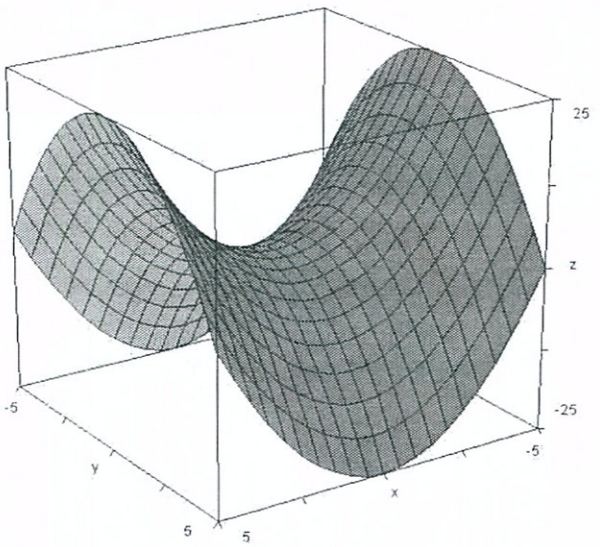
úgy érdemes megválasztani, hogy annak mind a minimum, mind pedig a maximum értéke látható maradjon ebben a tartományban. Ezt az **Automatikus méretezés** üzemmóddal érhetjük el.

💻 Nyissuk meg a **Megjelenítési lehetőségek** menüpontot és válasszuk ki az **Új ábra automatikus méretezése>** utasítást.



Mivel ez csak az új ábrákat érinti, újra kell az előzőt ábrázolnunk.

💻 Az **Ábrázolás** gombbal jelenítsük meg az ábránkat.

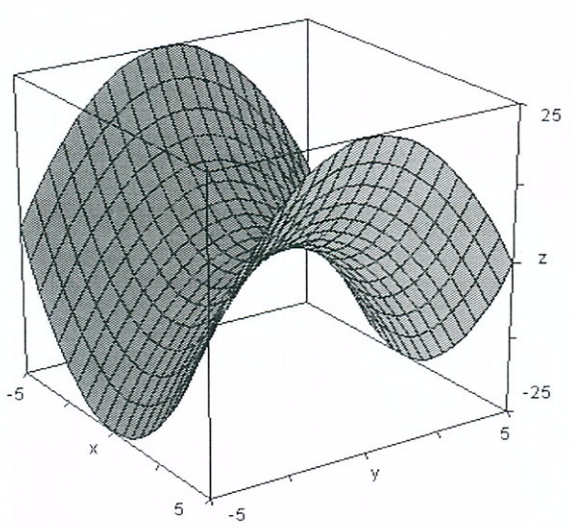


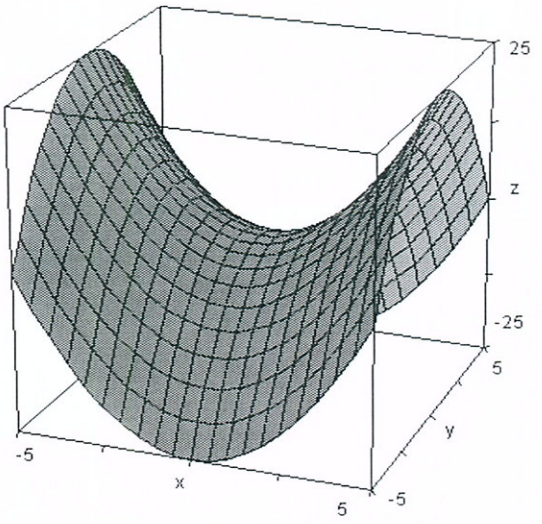
Az új ábrán a z tartománya $-25 \le z \le 25$ lett, mint ahogyan azt a doboz jobb oldali függőleges élén láthatjuk is. A színek összeállítása is változott, hiszen a 3D-ábrázolási ablakban alapértelmezett beállítás az, hogy minden új ábrának más a színe.

Hogy még érzékletesebben tanulmányozhassuk a megjelenített felületet, megtekinthetjük különböző nézőpontokból. Valós-idejű rendszerben forgathatjuk az ábránkat

- az egér segítségével: miközben nyomva tartjuk a SHIFT billentyűt, az egér bal gombjával (vigyázva, hogy ne kattintsunk az ábrára), vagy
- a négy nyíl-billentyűvel, →, ←, ↓, ↑, vagy
- az eszközsor **Jobbra forgatás** (→), **Balra forgatás** (←), **Lefelé forgatás** (↓) és **Felfelé forgatás** (↑) gombjaival.

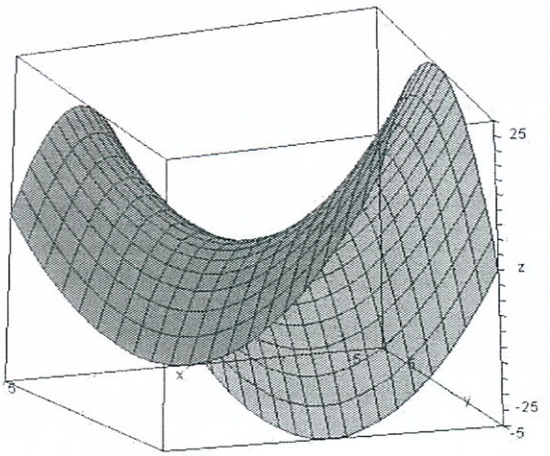
💻 Próbáljuk meg forgatni az ábránkat vízszintesen és függőlegesen, használjuk a nyíl-billentyűket és az eszközsor gombjait is. Végül állítsuk be, hogy az ábránk folyamatosan forogjon vízszintesen az **Ábra elforgatása** gombra kattintva.





Automatikus forgatással, vagy anélkül is nagyíthatjuk, illetve kicsinyíthetjük az ábránkat az **Ábra nagyítása** (gyorsbillentyűje: **PGUP**) és az **Ábra kicsinyítése** gombbal (gyorsbillentyűje: **PGDN**).

Gyakoroljuk az ábra nagyítását és kicsinyítését, miközben az továbbra is forog.



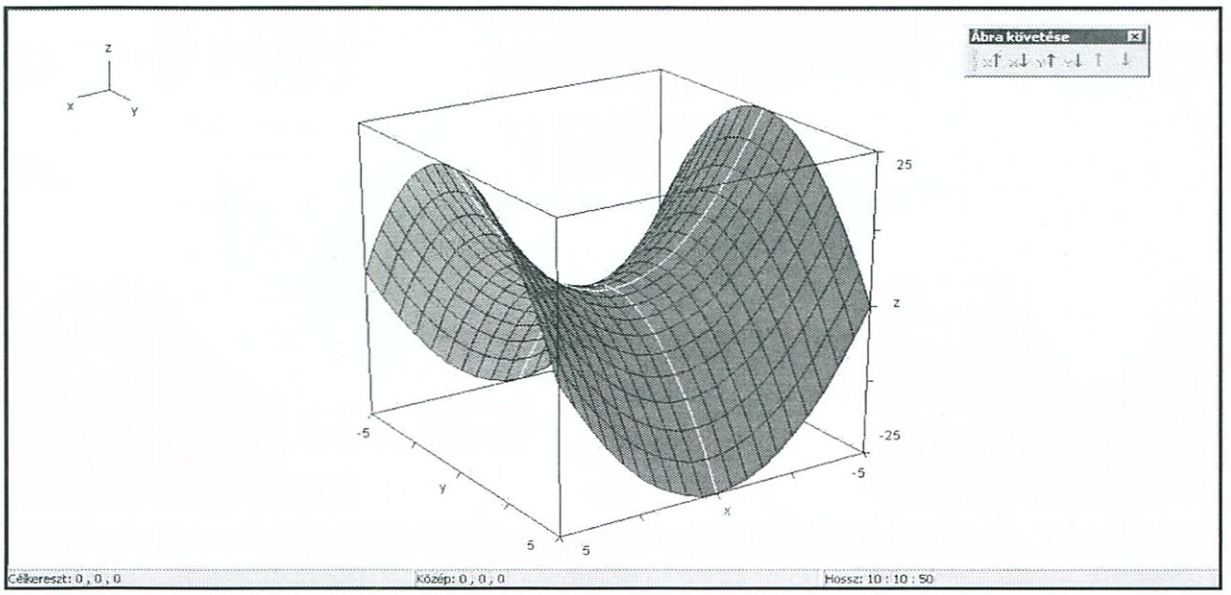
Az automatikus forgatást az **Ábra elforgatása** gombra, vagy az ábra mellé jobbra vagy balra kattintva állíthatjuk le. Alkalmazzuk a **Beállítások > Nézőpont** utasítást (vagy a **Nézőpont megadása** gombot az eredeti nézet visszaállítására:

Állítsuk le a forgatást jobbra az ábra mellé kattintva. Állítsuk vissza az eredeti nézetet a **Nézőpont megadása** gombbal, ...

... kattintsunk a TÖRLÉS-re, majd zárjuk az ablakot az OK gombbal.

A 3D ábrákon is használhatjuk a követés üzemmódot. Ismerkedjünk meg vele.

Indítsuk a követés módot az **Ábra követése** gombbal.



A követés üzemmódban az egyik *x*-állandó rácsgörbe illetve az egyik *y*-állandó rácsgörbe jelenik meg a felülettől eltérő színnel. (A követő színt beállíthatjuk a **Szerkesztés > Ábrázolás** menüpontban.) A követő görbék metszéspontja megad egy keresztet, melynek koordinátáit az állapotsorban leolvashatjuk követés közben.

A követő görbéket a bal egérgombbal, a SHIFT+nyíl billentyűkkel: SHIFT +→, SHIFT +←, SHIFT +↑ és SHIFT +↓, valamint az **Ábra követése** eszköztárban lévő gombokkal manipulálhatjuk.

Próbáljuk áthelyezni a követő görbéket úgy, hogy az egérkurzort a kívánt helyre mozgatjuk, majd a bal egérgombbal kattintunk (bal oldali kép).

Ezután gyakoroljunk a nyíl billentyűkkel. A → billentyű hatására az ábránk elfordul. Ahhoz, hogy a követő görbét mozgassuk, a SHIFT és a nyíl billentyűket egyszerre kell használnunk.

Előfordul, hogy a követő görbék éppen ellenkezőleg mozognak, mint ahogy azt várnánk. A követő vonalak az alábbi szabályok szerint mozognak:

- A SHIFT + → a függőleges követő görbét x pozitív irányába mozgatja
- A SHIFT + ← a függőleges követő görbét x negatív irányába mozgatja
- A SHIFT + ↑ a vízszintes követő görbét y pozitív irányába mozgatja
- A SHIFT + ↓ a vízszintes követő görbét y negatív irányába mozgatja

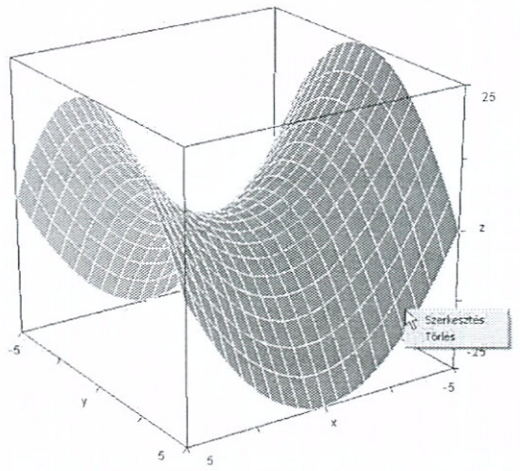
Az, hogy a követő görbe a lenyomott billentyűnek megfelelően mozog-e (például jobbra a jobb gomb lenyomásakor) attól függ, hogy a megfigyelési pont melyik oldalon helyezkedik el (hátul vagy elől). Az előző példában a megfigyelési pontunk hátul helyezkedik el.

Állítsuk le a követést az Ábra követése gombbal a **Megjelenítési lehetőségek > Ábra követése** utasítással vagy az **F3** gyorsbillentyűvel.

Gyakoroljunk az **Ábra követése** eszközsorral, majd állítsuk le a követést a gombbal.

Az ábra minősége nagyban függ a rácstól. Alapbeállításban a rács 20 x 20-as méretű. Ez azt jelenti, hogy az ábra mind vízszintes, mind a függőleges irányban 20 egyenlő sávra van osztva, így alkotva egy rácsot. Az ábrázolandó kifejezés a rács minden keresztezési pontjában értelmezésre kerül. Azokat a pontokat, melyek akár a vízszintes, akár a függőleges vonalon szomszédos pozíciót foglalnak el, vonalszegmensek kötik össze. Ez a rácsosztás állítható. Állíthatunk rajta a **Szerkesztés > Ábrázolás** utasítást kiadva, illetve a jobb egérgombbal az ábrára kattintva.

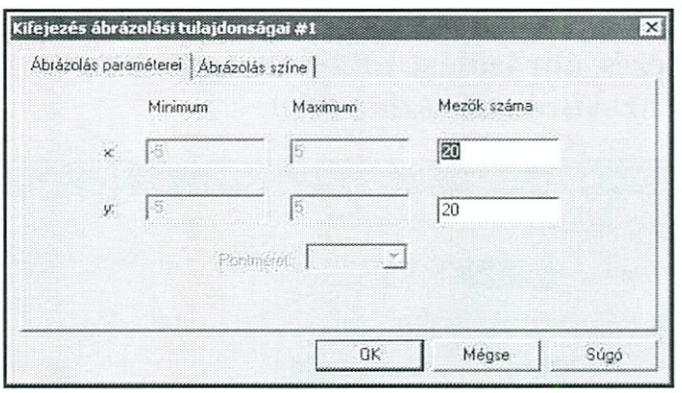
💻 Vigyük az egérkurzort az ábra fölé, és a jobb egérgombbal rákattintva nyissuk meg az alkalmazható utasítások menüjét.



Ezzel kijelöltük a felületet. Egy ábra kijelölése ugyanazt jelenti, mint amikor az algebra ablakban kijelölünk egy objektumot. A kijelölt ábra rácsgörbéi eltérő színnel jelennek meg.

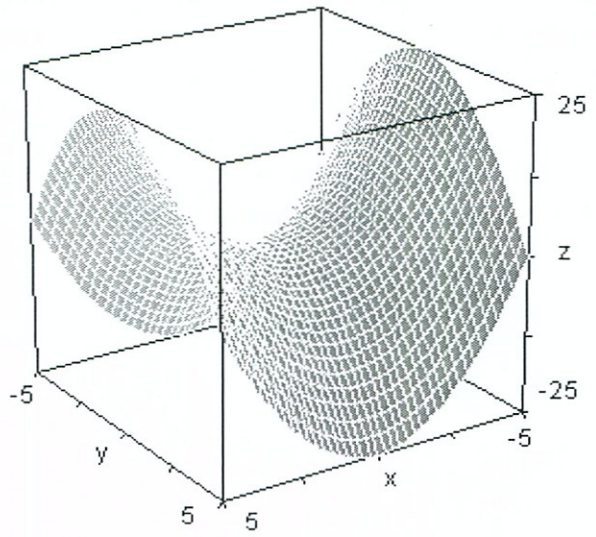
A **Szerkesztés** utasítást választva lenyílik egy dialógus ablak, mely számos lehetőséget kínál az ábra megjelenítésének beállításához, köztük a rácsméret állítását is. A TÖRLÉS gombra kattintva törölhetjük a kijelölt ábrát.

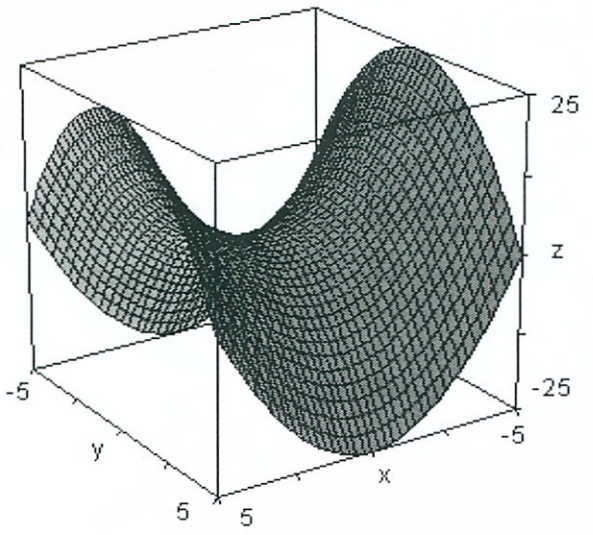
💻 Válasszuk a **Szerkesztés** utasítást és készüljünk a rácsméret beállítására.



A jelenlegi rácsméret a **Mezők száma** beviteli mezőkben látható.

💻 Állítsuk a rácsméretet 40 x 40-esre. Használjuk a TAB billentyűt ↹ a soron következő mezők kijelölésére, illetve kattintsunk duplán a kijelölendő mezőbe. Ha az OK-val bezárjuk az ablakot, az ábra automatikusan az új beállításnak megfelelően jelenik meg és továbbra is ki van jelölve (bal oldali kép). Ha meg akarjuk szüntetni a kijelölést, kattintsunk bárhova az ábrán kívül a bal egérgombbal.

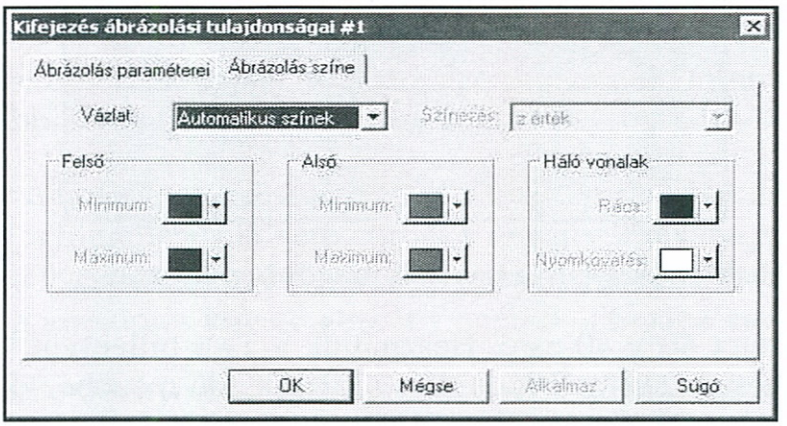




Az x és y értékének megduplázása azt jelenti, hogy most négyszer annyi pontot kell kiértékelni, és a megjelenítés négyszer annyi időt vesz igénybe. Ezt figyelembe kell vennünk a rács méretének megválasztásakor. Például egy 100 x 100-as rács esetében a **DERIVE**-nak 10.000 pontot kel kiértékelnie. Ez eredményezheti azt, hogy sok időbe telik az ábra megjelenítése, jelentősen lelassulnak az olyan műveletek, mint a forgatás, nagyítás vagy kicsinyítés.

Egy adott ábrához tartozó **Kifejezés ábrázolási tulajdonságai** dialógusablak megnyitására két lehetőségünk van: (1) a **Szerkesztés > Ábrázolás** utasítással és (2) a bal egérgombbal duplán az ábrára kattintva. A **Kifejezés ábrázolási tulajdonságai** párbeszédablak két lapot kínál fel az ábra szerkesztésére. Az imént az első, az **Ábrázolás paraméterei** című lapot használtuk. Ez lehetővé teszi, hogy a rácsméretet állítsuk, illetve parametrikus ábrák esetén beállíthatjuk a paraméterek tartományát. (Olyan függvényábrák esetén, mint a fenti is, az x és y tartománya megjelenítésre kerül, de állítani nem tudunk rajta. Ha ezeken az értékeken változtatni akarunk, használjuk a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Minimum/maximum** vagy a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Hosszúság/középpont** utasításokat.) Nézzük a másik lapot.

💻 Nyissuk meg a **Kifejezés ábrázolási tulajdonságai** dialógusablakot duplán az ábrára kattintva, majd válasszuk az **Ábrázolás színe** fület.

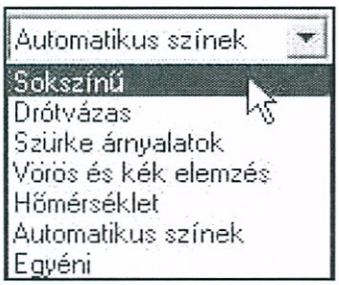


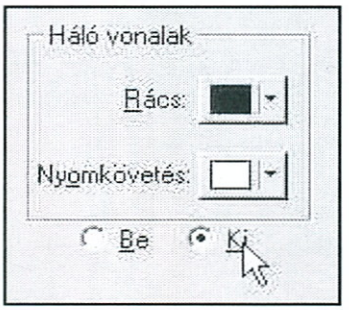
Az **Automatikus színek** alapbeállítás előre definiált színeket használ a felület **Felső** és **Alsó** tartományában. (Ez öt színpár körkörös ismétlődését jelenti, ha az **Automatikusan változtatja az ábrázolási színeket** funkció be van kapcsolva. A 2D-ábrázolási ablakhoz hasonlóan ez a kapcsoló a **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés** menüpontjának **Szín** fülecskéjén található.)

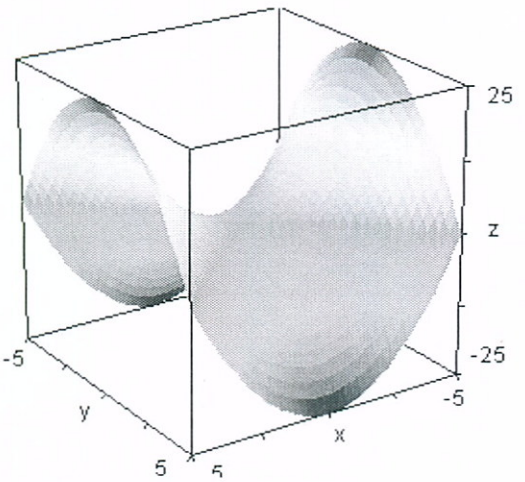
Ha saját sémát szeretnénk definiálni, használjuk a **Vázlat** menüben az **Egyéni** menüpontot. Ez aktiválja a **Színezés** menüt, és hozzáférhetővé teszi a színek beállítását.

Ez a menüpont a felületen futó vonalak színének megváltoztatását is lehetővé teszi.

Változtassuk a sémát, nyissuk le a **Vázlat** menüt, kattintsunk a ▾ lenyíló fülre, és válasszuk a **Sokszínű** menüpontot (bal oldali kép). Kapcsoljuk ki a háló vonalait a **Ki** szóra kattintva (középső kép). Ezután lépjünk ki az OK gombbal, és kattintsunk az ábra mellé, hogy ne legyen kijelölve.



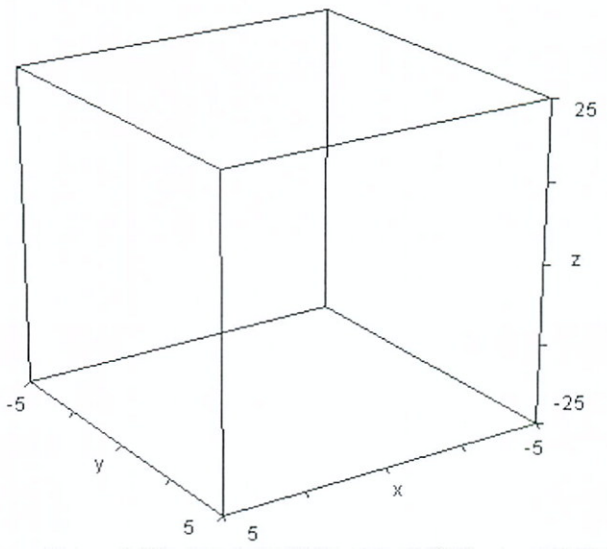




Megtanultuk, hogyan hozzunk létre 3D ábrát, és hogyan lehet azt alakítani. Ahogy a 2D-ábrázolási ablakban is, egyszerre több függvényt is ábrázolhatunk. Mielőtt szerkesztenénk, vagy törölnénk a függvényképet, egy kattintással jelöljük ki. Felhasználó által definiált, illetve automatikus megjegyzéseket ugyanúgy adhatunk, mint a 2D ábrázolás esetében.

Töröljük a jelenlegi ábrát és nézzünk egy újabb példát.

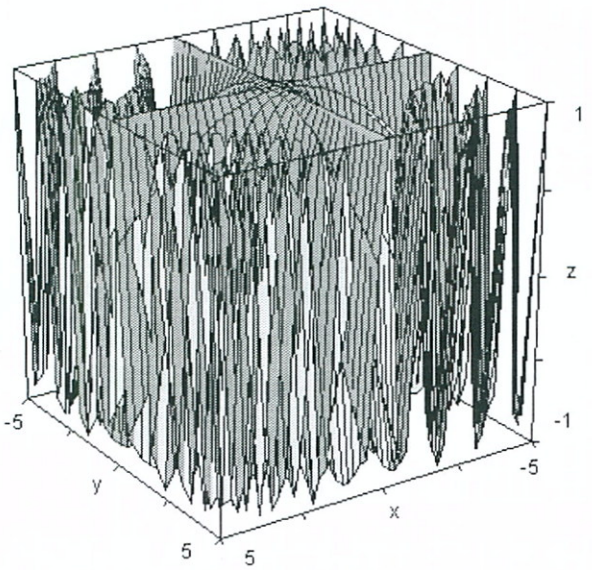
Töröljük az ábrát a DEL gombbal. Ugyanezt megtehetjük a jobb egérgombbal az ábrára kattintva és alkalmazva a **Törlés** utasítást, vagy a **Szerkesztés > Ábra törlése** paranccsal, esetleg az **Ábra törlése** gombra ⊠ kattintva.



Következőként tanulmányozzuk a $z = \cos(x \cdot y)$ ábráját.

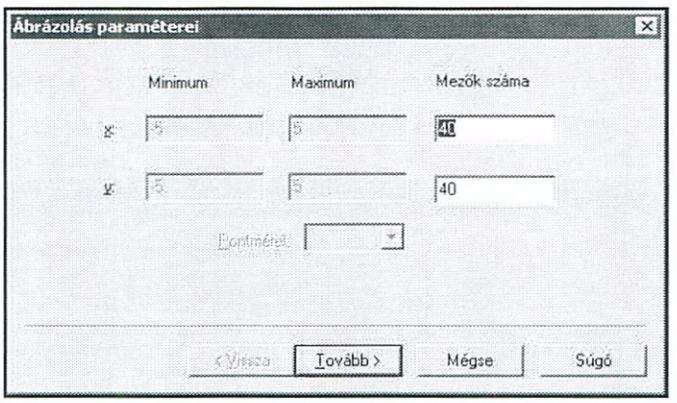
Írjuk be a fenti függvényt anélkül, hogy az algebra ablakot megnyitnánk. Használjuk az **F2** gyorsbillentyűt a kifejezés bevitelére (az ábrázolás ablakon belül is használható). Gépeljük be a $z=cos(xy)$-t a beviteli sorba és nyomjuk le az ↵ billentyűt.

Jelenítsük meg ennek a függvénynek az ábráját a 3D ábrázolás ablak **Ábrázolás** gombjával.



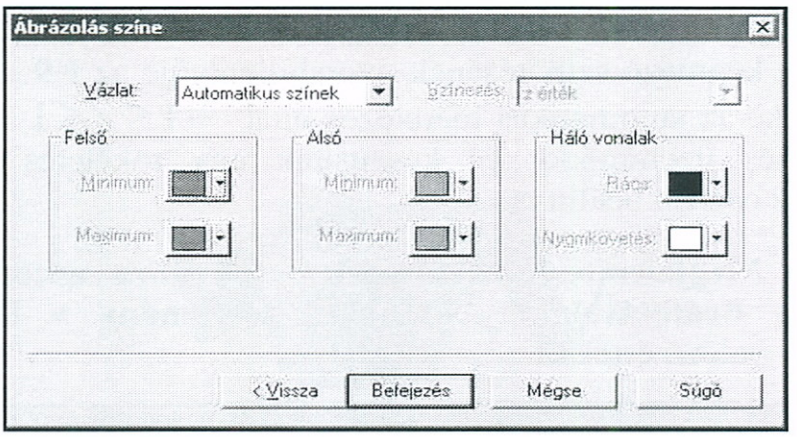
Az ábra örökölte az előző színsémáját valamint rácsméretét. Ez jellemző, ha az **Ábrázolás** gombot használjuk. Ha kíváncsiak vagyunk a jellemzőkre, a gomb helyett használjuk az **Beszúrás > Ábrázolás** utasítást. Ha az alapbeállítással szeretnénk dolgozni (20 x 20-as rács és szivárvány színskála), a legegyszerűbb, ha bezárjuk az ábrázolás ablakot és újat nyitunk. Töröljük az ábrát, hogy kipróbálhassuk a **Beszúrás > Ábrázolás** parancsot.

Töröljük az ábrát és a **Beszúrás > Ábrázolás** menüpontban kezdjünk újat.



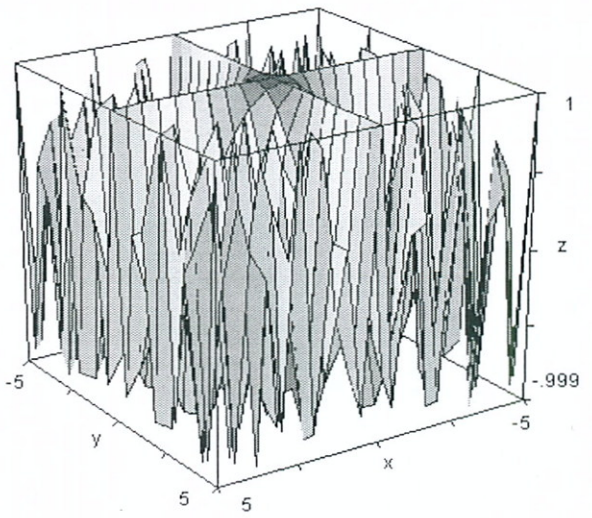
Ez tulajdonképpen a **Kifejezés ábrázolási tulajdonságai** párbeszédablak első oldala (az **Ábrázolás paraméterei**) és a jelenlegi, 40 x 40-es rácsméretet mutatja a két **Mezők száma** mezőben. Írjuk át mindkettőben a 40-et 20-ra.

A **Mezők száma** értékeit írjuk át mindkét mezőben 20-ra, és zárjuk az ablakot a TOVÁBB gombbal.



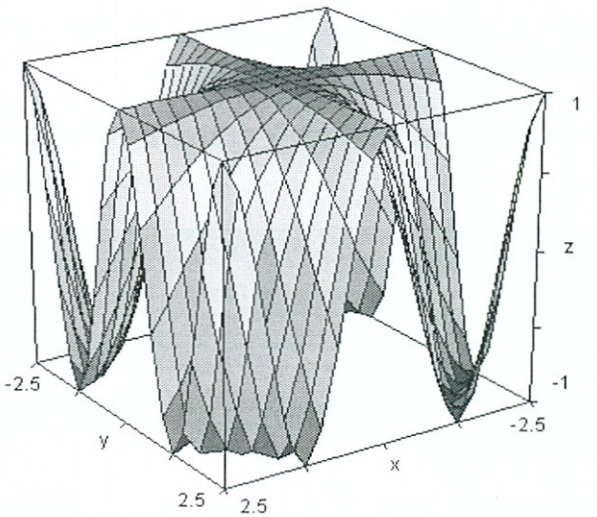
Most a **Kifejezés ábrázolási tulajdonságai** dialógusablak második oldalát látjuk (**Ábrázolás színe**) az aktuális színbeállításokkal. Váltsunk át **Sokszínű** üzemmódra:

💻 Állítsuk be a **Sokszínű** üzemmódot, kapcsoljuk vissza a háló vonalait a **Be** opcióra kattintva, majd lépjünk ki a párbeszédablakból a BEFEJEZÉS utasítással.



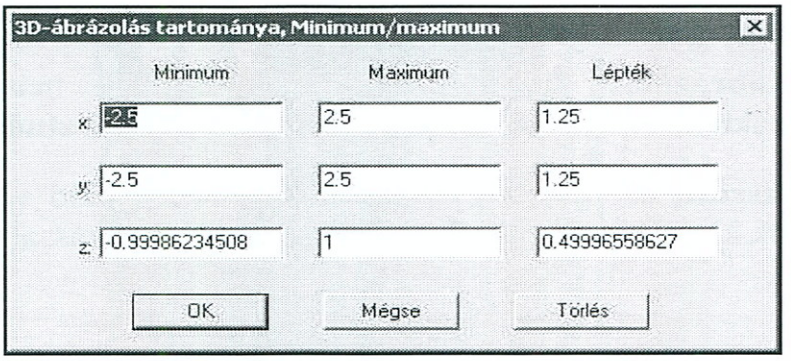
Ez az ábránk nagyon zavaros. Ennek az az oka, hogy a rácsnak túl sok oszcillációt kell végrehajtania. Úgy javíthatunk ezen, hogy kisebb területre korlátozzuk az ábránkat. Szűkítsük a képet.

💻 Szűkítsük az ábránkat a **Közelítés** gombbal.

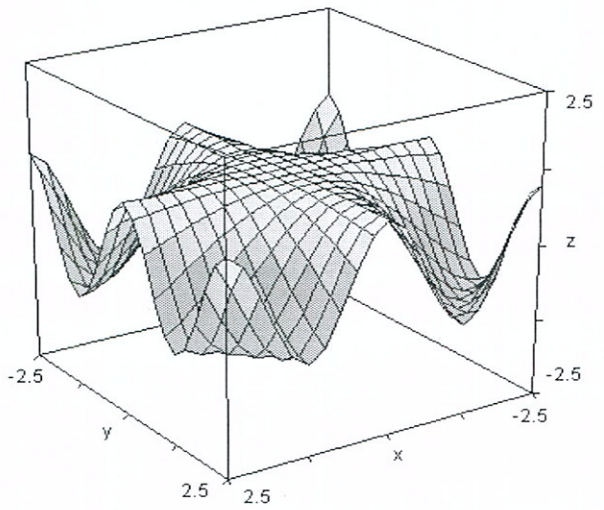


Ha az egérkurzort a gomb fölé visszük, látjuk a nevét, illetve azt, hogy hasonlóan a 2D-ábrázolás ablakhoz, a képmező szűkítésének gyorsbillentyűje az **F9**. Az x és y terjedelme feleződött és a z értéke az automatikus méretezés miatt $-1 \le z \le 1$ lett. Kapcsoljuk ki az automatikus méretezés üzemmódot és készítsünk egy tökéletes kockát, mindhárom tengelyen ugyanazt az osztást beállítva.

Kapcsoljuk ki a **Megjelenítési lehetőségek > Új ábra automatikus méretezése** üzemmódot, majd a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Minimum/maximum** ablakban írjuk fölül a z előző értékeit.

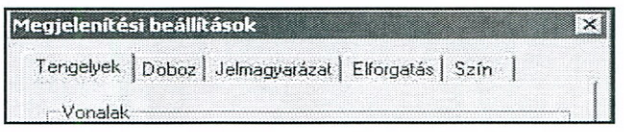


Ahhoz, hogy tökéletes kockát kapjunk, z értékeit vegyük egyenlőnek x és y megfelelő értékeivel, azaz: -2,5 ↹ 2,5 ↹ 1,25



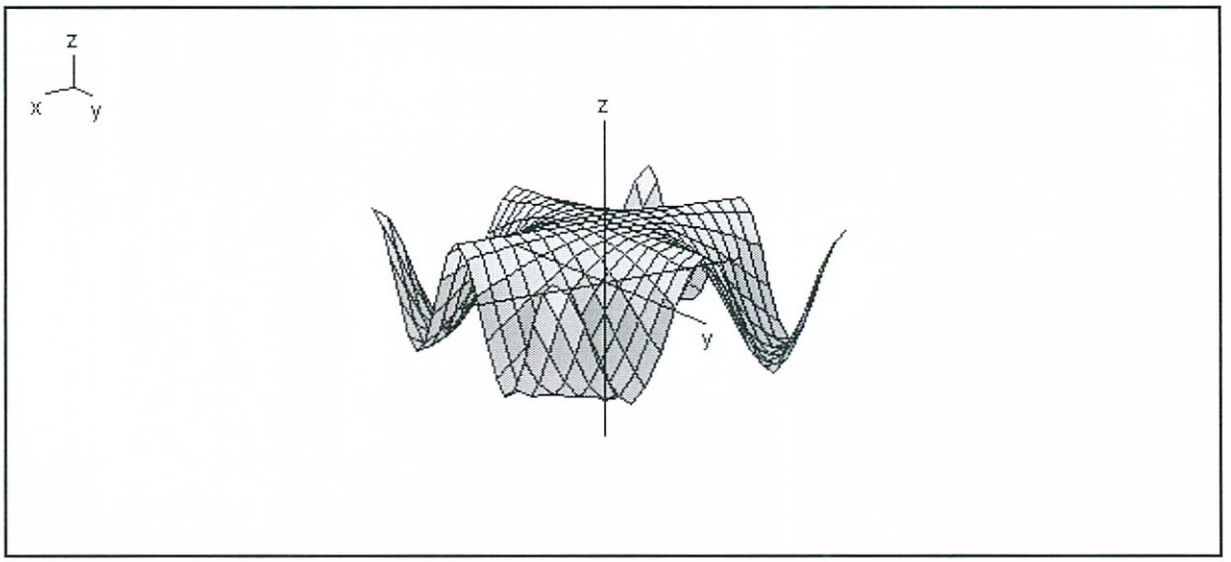
Végezzünk gyakorlatokat a **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés** utasítással. A dialógusablak előhívható úgy is, hogy a jobb egérgombra kattintunk, és kiválasztjuk a **Megjelenítés beállításai** menüpontot.

Nézzük, mi mindent állíthatunk az **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés** menüpontban. Nyissuk meg.

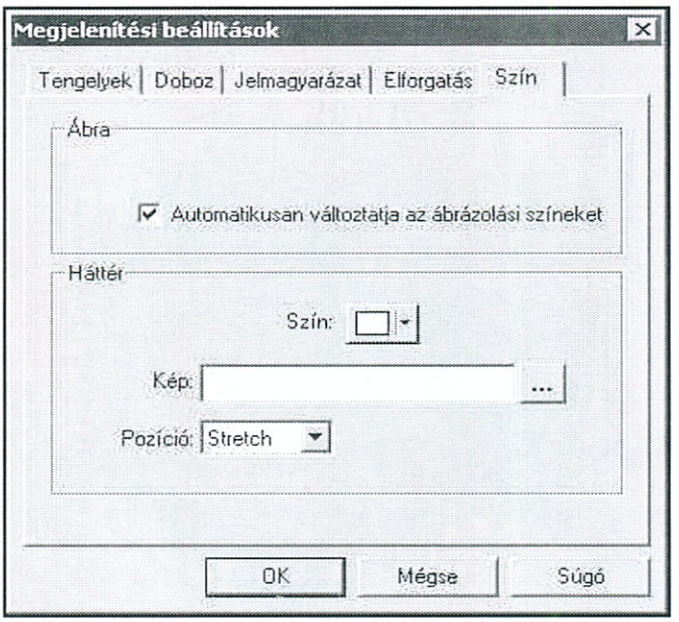


A **Megjelenítési beállítások** párbeszédablak első lapján, melynek **Tengelyek**: a neve, a tengelyek megjelenítését állíthatjuk be.

Tegyük aktívvá a tengelyeket az **Be** gombra kattintva. Menjünk át a **Doboz** lapra, és kapcsoljuk ki a vonalakat a **Ki** szóra kattintva. Mentsük a változtatást az OK-val.



Változtassunk a háttérszín beállításán. A bal egérgombbal kattintsunk valahol az ábrán kívül kétszer (ez a dialógusablak előhívásának harmadik módszere), majd válasszuk ki a **Szín** feliratú lapot.



Itt lehet állítani az új ábra színeinek váltakozását. Be tudjuk állítani a háttérszínt is, esetleg lehet a hátterünk egy bitkép is.

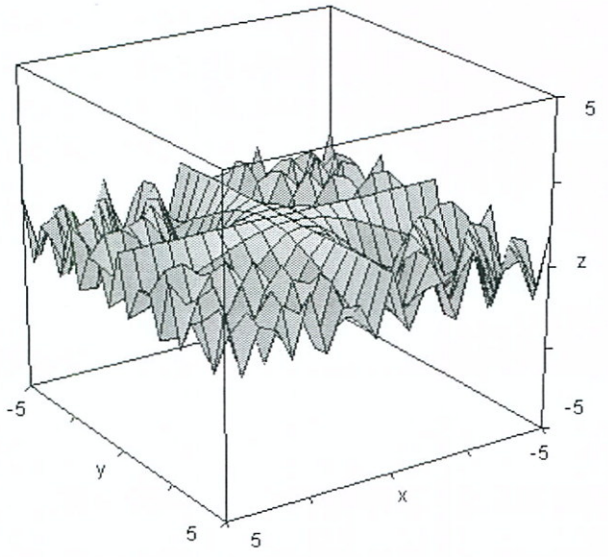
Lépjünk ki változtatás nélkül az ESC billentyűvel.

Zárjuk a fejezetünket még egy kísérlettel, ismét a $z = \cos(x \cdot y)$ függvényt felhasználva egy új 3D-ábrázolás ablakban.

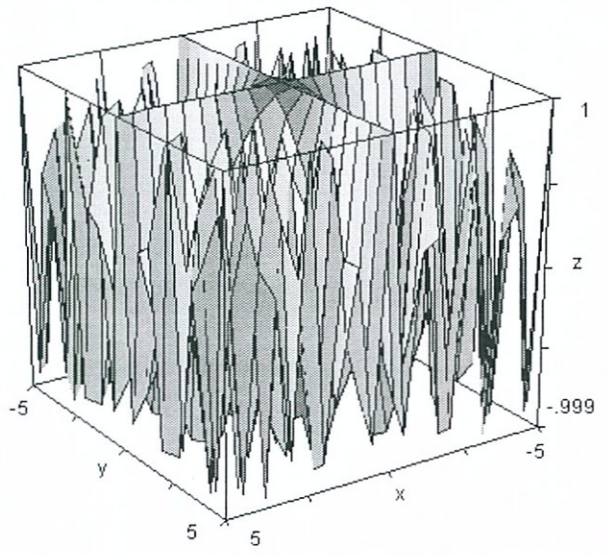
Térjünk vissza az algebra ablakunkhoz a gombbal.

#2: z = COS(x·y)

Nyissunk új 3D-ábrázolás ablakot az **Ablak > Új 3D-ábrázolási ablak** utasítással és ábrázoljuk a #2 kifejezést.

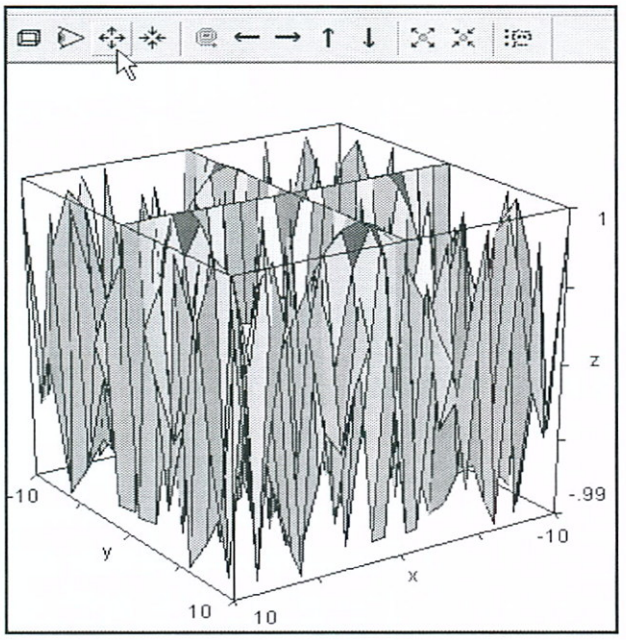


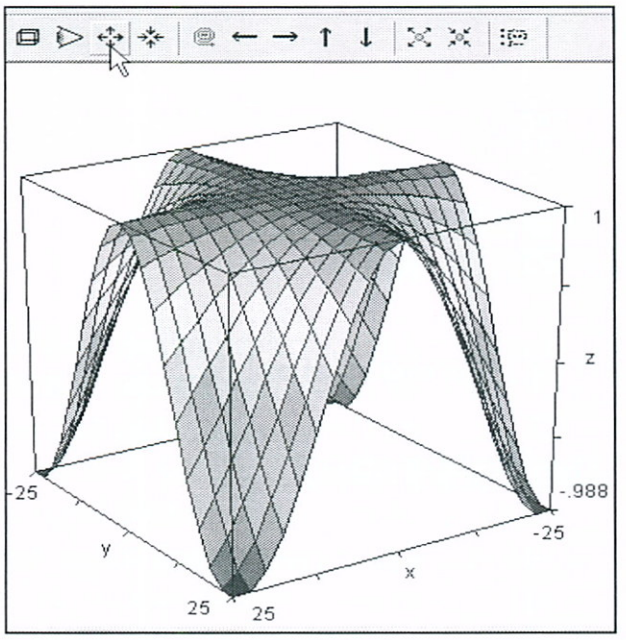
Kapcsoljuk be az automatikus méretezés üzemmódot az **Megjelenítési lehetőségek > Új ábra automatikus méretezése** utasítással. Töröljük az ábrát, majd jelenítsük meg újra a függvényünket.



Mikor legutóbb láttuk ezt az ábrát, szűkítettük az ábrázolási területet. Mi történne, ha ehelyett most tágítanánk?

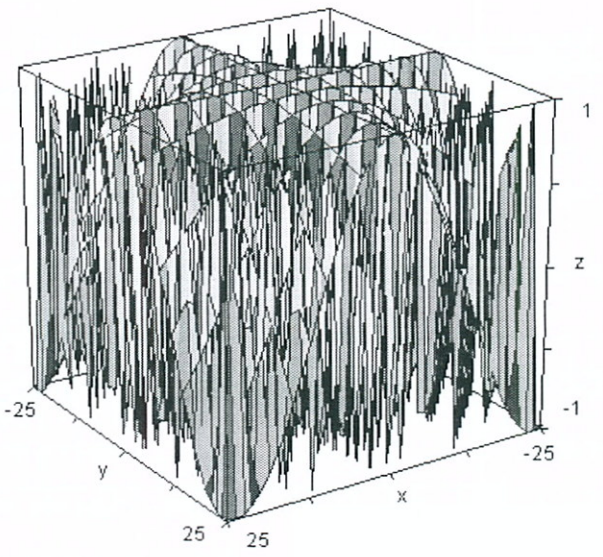
Tágítsuk az ábrázolási területet a **Távolítás** gombbal, (bal oldali kép). Amint az várható volt, ez a kép még zavarosabb. Ennek ellenére tágítsuk a területet még egyszer.





Meglepetés történt. Minél jobban nyitjuk a képet, annál több oszcillációt kellene látnunk. Hogy lehet mégis, hogy ez a képünk oly sima, oszcilláció-mentes?

Változtassuk a rácsméretet 40x40-re.



Itt láthatjuk a várt oszcillációt. Az előző képen a rács nem volt elég részletes ahhoz, hogy mutassa ezeket. A pontosság fogalma itt hasonló ahhoz, amit a közelítő érték számításánál figyelhettünk meg. Az ábra minőségében ugyanolyan szerepet játszik a rács mérete, mint az, hogy hány számjegy pontossággal számolunk közelítő értéket.

Lépjünk ki a **DERIVE**-ból anélkül, hogy mentenénk a munkánkat.

Összefoglalás

Algebra ablak

..... váltás a 3D-ábrázolás ablakra

Ablak > Új 3D-ábrázolási ablak ..... új 3D-ábrázolási ablak létrehozása

3D- ábrázolás ablak

vagy **Szerkesztés > Ábra törlése vagy** DEL ..... ábra törlése a grafikus ablakból

..... kijelölt kifejezés ábrázolása a grafikus ablakban

vagy **Megjelenítési lehetőségek > Ábra követése** vagy **F3** ..... összes ábra követése

vagy **Beállítások > Nézőpont** ..... nézőpont megadása 3D-ábránál

vagy **F10** ..... távolítás

vagy **F9** ..... közelítés

vagy **Megjelenítési lehetőségek > Ábra elforgatása** ..... ábra folyamatos elforgatása

, , , vagy →, ←, ↓, ↑ ..... ábra elforgatása (jobbra, balra, le, fel)

vagy **PgUp** ..... ábra nagyítása

vagy **PgDn** ..... ábra kicsinyítése

Szerkesztés > Ábrázolás vagy dupla kattintás az ábrán ..... kifejezés ábrázolási tulajdonságai

: Ábrázolás paraméterei ..... rács méretének beállítása

: Ábrázolás színe ..... ábrázolás színsémájának beállítása

Szerkesztés > Összes ábra törlése ..... összes ábra törlése a grafikus ablakból

Beszúrás > Ábrázolás ..... kijelölt kifejezés ábrázolása a grafikus ablakban

Beállítások > Ábrázolási terület ..... ábrázolási ablak hossz, közép, méret beállítása

Beállítások > Ábrázolási tartomány ..... ábrázolási ablak min., maximum, méret beállítása

Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés vagy dupla kattintás az ábrán kívül .....

..... megjelenítési beállítások

: Tengelyek ..... tengelyek megjelenítésének beállítása

: Doboz ..... doboz megjelenítésének beállítása

: Háttér ..... háttérszín beállítása

Megjelenítési lehetőségek>Új ábra automatikus méretezése ..... új ábra automatikus méretezése

SHIFT+→, SHIFT+←, SHIFT+↓, SHIFT+↑ vagy a kifejezés eszköztár gombjainak használata .....

..... vonalak mozgatása

bal egér kattintás az ábrán ..... ábra kijelölése

8. fejezet

Mi az 'egyszerű'?

Könyvünkben eddig leggyakrabban az egyszerűsítést használtuk. Vagy az **Egyszerűsítés** gombbal = , vagy az **Egyszerűsítés > Egyszerűsítés** utasítással, vagy az olyan közvetlen egyszerűsítési megoldások valamelyikével, mint például az egyenlőség jel. Ennek az utasításnak a célja, hogy találjunk egy azonos értékű kifejezést, amely egyszerűbb az eredetinél. De mi az 'egyszerű'? Mint a következő példákból látni fogjuk, az egyszerűsítés kérdése igen nehéz matematikai probléma. Megismerjük majd az egyszerűsítés finomságait és azt, hogy milyen hasznos lehet a **DERIVE** az egyszerűsítés matematikai hátterének megértésében. Albert Einstein egyszer azt mondta: *„Törekednünk kell arra, hogy a dolgokat a lehető legegyszerűbben fejezzük ki; de ne annál egyszerűbben."* A **DERIVE** így működik.

Indítsuk a **DERIVE**-ot alapbeállítással. Írjuk be a $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ kifejezést $\sqrt{(4-2\sqrt{3})}=$ alakban:

#1: $\sqrt{(4-2\cdot\sqrt{3})} = \sqrt{3}-1$

Emlékezzünk, hogy a kifejezés végén használt egyenlőségjel a bevitt kifejezést azonnal egyszerűsíti és az egyszerűsítetlen és egyszerűsített kifejezéseket egy egyenlet két oldalaként jeleníti meg.

Egyszerűsítsük a $\left(\frac{14\sqrt{93}}{243}+\frac{5}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$ kifejezést $(14\sqrt{93}/243+5/9)$^$(1/3)=$ alakban:

#2: $\left(\frac{14\cdot\sqrt{93}}{243}+\frac{5}{9}\right)^{1/3} = \frac{\sqrt{93}}{18}+\frac{1}{2}$

Egyszerűsítsük a következőt: $1+e^{i\cdot\Pi}$

#3: $1+e^{i\cdot\pi} = 0$

A #1-t kézzel nem olyan könnyű ellenőrizni. A #2 meglehetősen nehéz és mutatja a **DERIVE** egyszerűsítési eljárásában rejlő erőt. A #3 nevezetes példa az öt matematikai állandó összekapcsolására. De mindhárom esetben nyilvánvaló, hogy az eredmény a jobboldalon egyszerűbb, mint a baloldalon lévő eredeti.

Az egyszerűsítés során egy kifejezés alakja megváltozhat, de matematikai jelentése nem. A következő utasítások eleget tesznek ennek a követelménynek: **Egyszerűsítés > Egyszerűsítés** (és az **Egyszerűsítés** gomb), **Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás** és **Egyszerűsítés > Kibővít**.

Írjuk be, egyszerűsítsük és bontsuk tényezőkre a következő kifejezést: $x(x(x-2)-5)+6$.

```
#4:  x·(x·(x - 2) - 5) + 6

#5:                                   3      2
                                      x  - 2·x  - 5·x + 6

#6:                                   (x - 1)·(x + 2)·(x - 3)
```

A három alak közül melyik a legegyszerűbb? Erre a kérdésre nem könnyű válaszolni. Miféle egyszerűségről beszélünk egyáltalán?

- Ha azt nézzük, hogy melyik áll a legkevesebb karakterből, az #5 a legegyszerűbb.
- A 0 keresés szempontjából a #6 a legegyszerűbb.
- Ha a kifejezést olyan számológéppel akarjuk megoldani melynek nincs memóriája s csak a négy alapműveletet képes végrehajtani (szorzás, osztás, összeadás és kivonás), akkor a #4 a legegyszerűbb.

Az egyszerűség különböző *definíciói* csak az egyik aspektusa az egyszerűsítés problémájának. A következő feladatban egy másik aspektussal találkozunk.

💻 Írjuk be és egyszerűsítsük: $\sqrt{u \cdot v} - \sqrt{u} \cdot \sqrt{v}$.

```
#7:  √(u·v) - √u·√v

#8:                                   √(u·v) - √u·√v
```

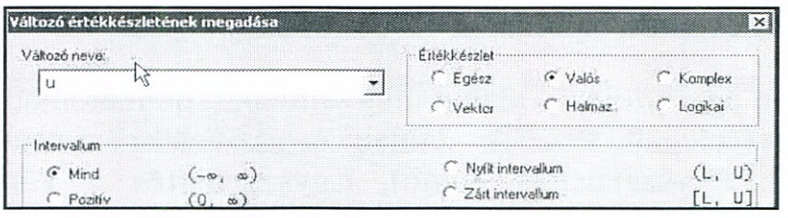
Ha eredményként 0-t vártunk, akkor most csalódtunk. Vajon a **DERIVE** nem tud végrehajtani egy ilyen 'egyszerű' egyszerűsítést? Tegyük a következőt:

💻 Helyettesítsük az *u*-t és a *v*-t is -1-el a **Változó behelyettesítése** gomb [SUB] segítségével és most egyszerűsítsük az eredményt.

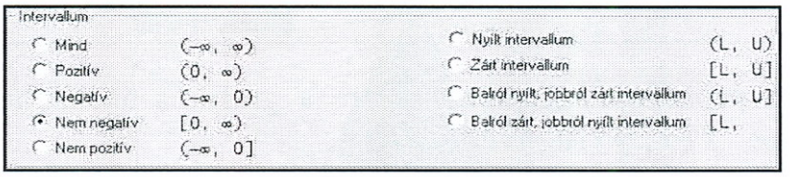
```
#9:  √((-1)·(-1)) - √(-1)·√(-1)

#10:                                  2
```

Nos ez az! A kifejezés *u és v nem minden valós értékénél* lesz zéróval egyenlő. A **DERIVE**, mielőtt alkalmaz egy átalakítási szabályt, ellenőrzi, hogy a változó adott tartományában alkalmazható-e az átalakítás. Alapbeállításként minden változó értelmezési tartománya a valós számokat fedi. Az *u* és *v* változók mely tartományában lenne a #7 egyszerűsítésének eredménye 0? Használjuk a **Képlet készítő > Változó tartománya** utasítást, ha valamelyik változó értelmezési tartományát meg akarjuk változtatni. Első közelítésben legyen *u* és *v* nem negatív.

💻 Mondjuk ki *u*-ról, hogy nem negatív: nyissuk meg a **Képlet készítő > Változó tartománya** ablakot, írjuk a **Változó neve** mezőbe az *u* változó nevét (ez aktivizálja az alapbeállítást, amely **Valós** az **Értékkészlet**: mezőben és **Mind** az **Intervallum**: mezőben), ...



💻 ... az **Intervallum** mezőben válasszuk a **Nemnegatív** gombot,...



💻 ... majd zárjuk a dialógusablakot az OK-.val.

```
#11:  u :∈ Real [0, ∞)
```

A **DERIVE** megjeleníti a változó új értelmezési tartományát a #11-ben. A kifejezés jelentése: „*u értelmezési tartománya a valós számok körében 0-tól (beleértve) a végtelenig (kizárva) terjedő intervallumot fogja át.*" A **DERIVE** a megszokott jelölést használja, vagyis a szögletes zárójelet, ha a határérték is beleértendő a tartományba, illetve a zárójelet, ha a határérték nem értendő bele az értelmezési tartományba. Figyeljük meg, hogy az értelmezési tartomány deklarálása a #13-ban nem kijelölve jelenik meg.

💻 Az előző eljárást megismételve deklaráljuk *v*-ről, hogy nem-negatív valós szám.

```
#12:  v :∈ Real [0, ∞)
```

Ellenőrizzük, hogy ez van-e valamiféle hatással az eredeti egyszerűsítési problémánkra.

💻 Egyszerűsítsük a $\sqrt{u \cdot v} - \sqrt{u} \cdot \sqrt{v}$ kifejezést.

```
#13:                                                    0
```

Az imént kiválasztott értelmezési tartomány elég „biztonságos" volt ahhoz, hogy a $\sqrt{u \cdot v} - \sqrt{u} \cdot \sqrt{v}$ egyszerűsítésének eredményeként 0-t kapjunk. Mi a minimális megszorítás? Vizsgáljuk tovább ezt a példát.

💻 Definiáljuk az *f* függvényt, beírva a következőt: $f(x,y) := \sqrt{(xy)} - \sqrt{x}\sqrt{y}$

```
#14:  f(x, y) := √(x·y) − √x·√y
```

Amellett, hogy a := hozzárendelő műveleti jellel a változóknak értéket adhatunk, használhatjuk függvények definiálására is.

Most már könnyedén egyszerűsíthetjük a $\sqrt{(xy)} - \sqrt{x}\sqrt{y}$ kifejezést, használjuk az *f* függvényt és az egyenlőségjelet.

💻 Egyszerűsítsük a fenti kifejezést, beírva a következőt: *f(x, y)*

```
#15:  f(x, y)
#16:                                                √(x·y) − √x·√y
```

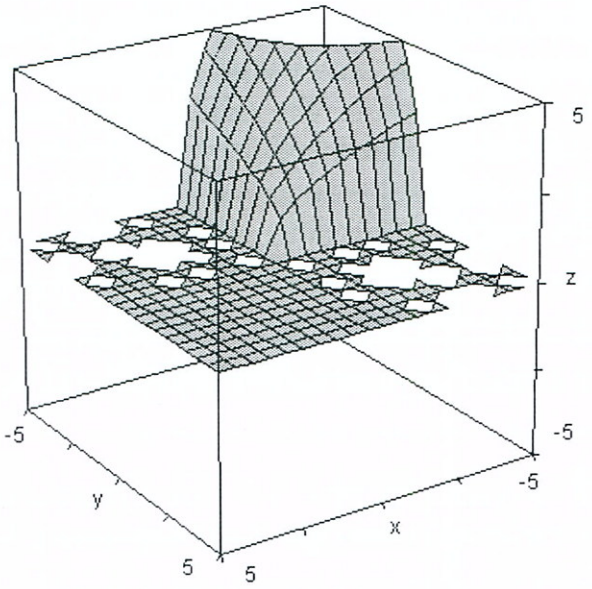
Ezzel a módszerrel könnyen megkereshetjük azokat az értékeket, amelyeknél a kifejezés nem egyenlő nullával. Ahelyett, hogy végig próbálnánk a **Változó behelyettesítése** dialógusablakot, egyszerűen próbáljuk ki azokat a számokat, amelyeket *f* argumentumaiként kívánunk használni.

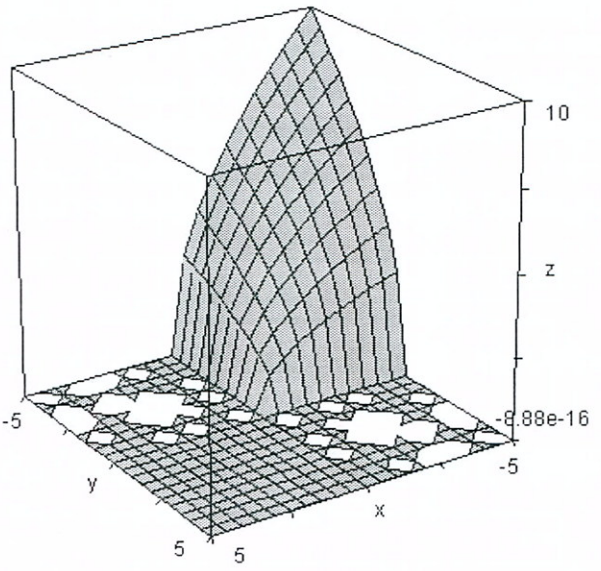
💻 *x* és *y* helyére helyettesítsünk be -1-et; írjuk be a következőt: *f(- 1 , - 1) =*

```
#17:                                    f(-1, -1) = 2
```

Hatékony lehetőség a probléma megközelítésére a grafikus ábrázolás. Egy 3D ábrázolás ablakban ábrázoljuk az $f(x, y)$ függvényt.

💻 Jelenítsük meg háromdimenziós ábrán a $\sqrt{x \cdot y} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ kifejezést. Jelöljük ki a #15-t, nyissunk meg egy 3D-ábrázolás ablakot és adjuk ki az ábrázolás utasítást (bal oldali kép). Hogy minden pontot lássunk, kapcsoljuk be a **Megjelenítési lehetőségek > Új ábra automatikus méretezése** opciót, töröljük az ábrát, és rajzoljuk újra.

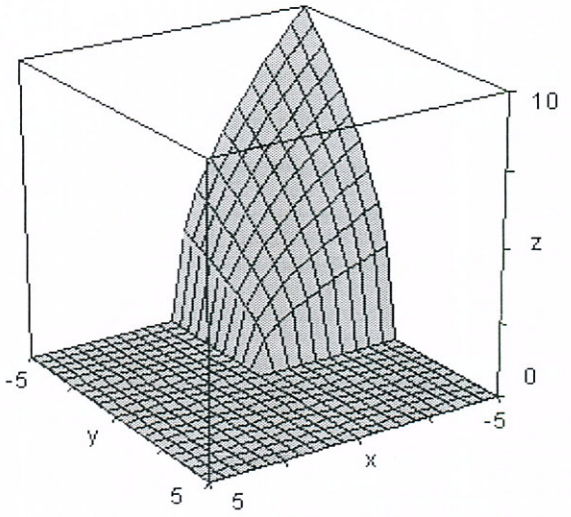




Ezek az ábrák segítenek még alaposabban megérteni az egyszerűsítés problematikáját. Három részre bonthatjuk az ábrákat, mindhárom rész másképpen viselkedik. Ha mind x, mind pedig y negatív (az ábrák hátsó negyede), világosan látható, hogy a kifejezés nem egyenlő nullával. Ha mind az x, mind az y pozitív (az ábrák elülső negyede), a kép tanúsága szerint a kifejezés egyértelműen egyenlő nullával. Ha vagy x vagy y negatív, de nem mindkettő, (a képek jobb és bal oldali negyede), a kifejezés több helyen látszik nullával egyenlőnek, de vannak lyukak, ahol a függvény értéke nem világos. Viszont ha algebrai egyszerűsítést végeztünk, a kifejezés nullát adott eredményül, mint ahogyan láttuk azt az $y \geq 0$ esetében. De akkor honnan lesznek a lyukak? Ha lebegőpontos módszerrel közelítő értéket számítunk (mint amilyen az ábrázolás algoritmusa is), a kerekítésből eredő hibák egy viszonylag csekély mértékű nem valós összetevőt eredményeznek és így a végrehajtó program lyukakat produkál.

Hogy az ilyen, az ábra második és negyedik negyedében észlelt hatásokat kiküszöböljük, ábrázoljuk a $z = \left| \sqrt{x \cdot y} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \right|$ kifejezést.

💻 Töröljük az ábrát. Írjuk be és ábrázoljuk a következőt: $z = abs(f(x,y))$



Zárjuk be az ábrázolás ablakot.

Az ábra megmutatta, hogy elegendő a két változó közül az egyiket, mondjuk y-t nemnegatívnak deklarálni. A **Képlet készítő > Változó tartománya** parancs a 'kettőspont - eleme' :∈ operátort használja az értelmezési tartomány megadásához.

Deklaráljuk a nemnegatív valós y-t a következő módon: y: Real[0,inf). A görög szimbólum beviteléhez használjuk a görög betűk eszköztárát, vagy írjuk be az epsilon szót (egy harmadik lehetőség a matematikai szimbólumok eszköztárán levő :∈ gomb megnyomása). A végtelen ∞ jel beviteléhez pedig használja a matematikai szimbólumok eszköztárát, vagy írja be az **inf** szót.

```
#18:  y :∈ Real [0, ∞)
```

Nézzük meg, elegendő-e ez a megszorítás.

Egyszerűsítsük még egyszer a kifejezést a következő módon: *f(x,y)=*

```
#19:                                    f(x, y) = 0
```

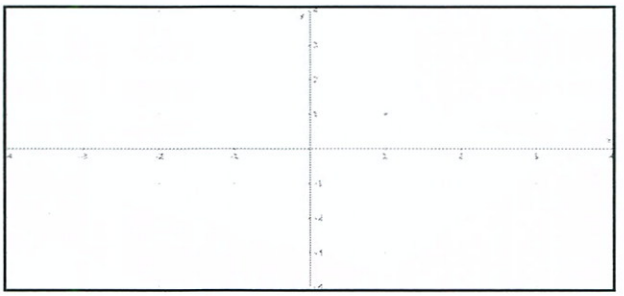
Nézzünk egy újabb példát, mely a *„mikor egyszerűsít?"* kérdést taglalja. Igaz-e a következő egyenlet: $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$?

Írjuk be és egyszerűsítsük az egyenlet két oldalának különbségét.

```
#20:  √(1/x) - 1/√x

#21:                                    SIGN(x)/√x - 1/√x
```

Újabb példa ez arra, hogy milyen kiváló a **DERIVE** egyszerűsítő programja, és hogy milyen körültekintően kell eljárni, amikor manuálisan egyszerűsítünk. A #21 egyszerűsített kifejezés segít meghatározni, hogy #20 mely értékeknél nem lesz nulla. Hogy még alaposabban tanulmányozzuk a kifejezést, érdemes ábrázolni.

Jelenítsük meg $y = g(x)$ függvény ábráját, ahol $g(x)$ a #21-ből következik. Jelöljük ki a #21-t. Nyissunk egy 2D ábrázolás ablakot az algebra ablak **2D-ábrázolás ablak** gombjával, majd az ábrázolás ablak **Kifejezés ábrázolása** gombjára kattintva jelenítsük meg.



Az x tengely pozitív oldala vörös lett. Tehát a kifejezés minden pozitív értékre 0. Végezzük el a megfelelő értelmezési tartomány változtatást:

Kapcsoljuk ki az ábrázolási ablakot és deklaráljuk, hogy x pozitív valós szám.

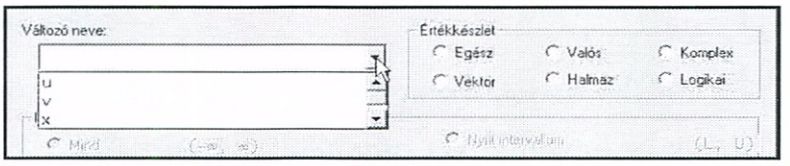
```
#22:  x ∈ Real (0, ∞)
```

Egyszerűsítsük a $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ kifejezést.

```
#23:                                                    0
```

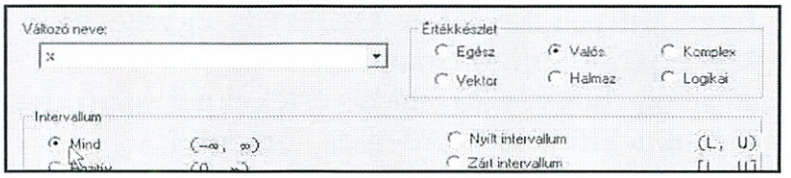
Ha törlünk egy ilyen deklarációt, mint amelyet a #22-ben tettünk, az nem érvényteleníti a változóra vonatkozó deklarációt. A definíciót a **Képlet készítő > Változó tartománya** utasítással, vagy egy megfelelő ∈ -vel jelzett kifejezéssel tudjuk megváltoztatni. A **Képlet készítő > Változó tartománya** párbeszédablakban felülvizsgálhatjuk az összes eddig tett deklarációnkat. Ott választhatjuk például a pozitív valós számok helyett újra az összes valós számot.

Tekintsük át a változókat, melyekre vonatkozóan deklaráltuk az értelmezési tartományt. Nyissuk meg a **Meghatározások > Változó tartománya** párbeszédablakot, majd a **Változó neve** menüpontot.



Állítsuk vissza x és y értelmezési tartományát az összes valós számra.

Változtassuk meg x értelmezési tartományát. Kattintsunk abba a sorba, ahol az x-et találjuk, vagy gépeljük be a **Változó neve** mezőbe, majd az **Intervallum** mezőben kattintsunk a **Mind** gombra, ...



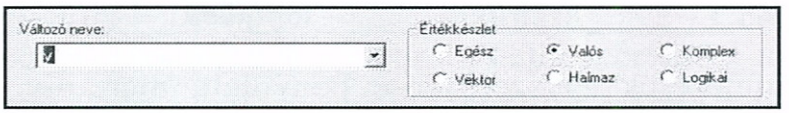
... majd lépjünk ki az OK-val.

```
#24:  x :∈ Real
```

Állítsuk vissza *y* értelmezési tartományát az összes valós számra a fentiek szerint eljárva. Jelöljük ki megfelelő kifejezést:

```
#18:  y :∈ Real [0, ∞)
```

Használjuk a **Szerkesztés > Kifejezés** menüpontot a **Változó tartományának megadása** dialógusablak megnyitásához,...



..., majd ismételjük meg a fenti lépéseket.

```
#18:  y :∈ Real
```

A matematikusok az *x* és *y* elnevezést a valós számok körében lévő változókra használják, míg az *m* és *n* elnevezést az egész számokra. Tehát például a $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ kifejezést úgy értelmezik, hogy csak olyan argumentumai vannak, amelyek a $\frac{\pi}{2}$ páratlan számú többszörösei.

Írjuk be a fenti kifejezést az alábbi formában: *sin((2n+1)pi/2)*

```
#25:  SIN((2·n + 1)·π / 2)
```

Hoppá! Ez másképp néz ki. Ha $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ formában kívánjuk megjeleníteni, a *pi/2*-t zárójelek közé kell tennünk.[11]

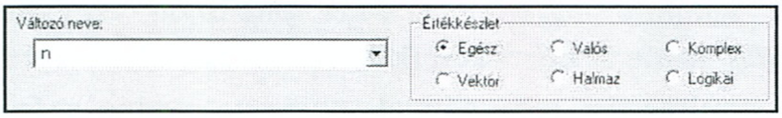
Írjuk be, majd egyszerűsítsük: *sin((2n+1) (pi/2))*

```
#26:  SIN((2·n + 1)·π / 2)
#27:                                  COS(π·n)
```

A **DERIVE** a kifejezést trigonometrikus azonosságokat használva egyszerűsítette. A szinusz helyett a koszinuszt használta, mert a koszinusz argumentuma egyszerűbb. Nyilvánvaló, hogy a **DERIVE** nem tekintette az *n*-t egész számnak. A π egész számú többszöröseinek koszinusza 1 vagy -1. Ha azt akarjuk, hogy a **DERIVE** az *n*-t egész számnak vegye, az *n* változóról deklarálnunk kell, hogy egész szám.

[11] Tanári megjegyzés: Az ilyen feladatok is hasznosak a diákok számára a kifejezések felépítésének megértéséhez.

Deklaráljuk, hogy n értelmezési tartománya az összes egész szám.




```
#28:   n :∈ Integer
```

Egyszerűsítsünk újra.

Egyszerűsíthetjük akár a #25, akár a #26 kifejezést.

```
                                          n
#29:                                  (-1)
```

A trigonometrikus kifejezések egyszerűsítése bonyolult, mert oly sok trigonometrikus azonosságot kell figyelembe vennünk. Kezdjük egy egyszerű feladattal.

Írjuk be a $\cos^2 x - \sin^2 x$ kifejezést a következő, kényelmes formában: *cos*^2*x* - *sin*^2*x*, majd egyszerűsítsük.

```
              2        2
#30:   COS(x)  - SIN(x)

                                              2
#31:                                2·COS(x)  - 1
```

Van egy másik egyszerű módja, hogy ezt a kifejezést leírjuk: használjuk a többszörös szögeket. Az alapegyszerűsítés ezt nem használta. Próbálkozzunk a kiterjesztéssel és a szorzattá alakítással.

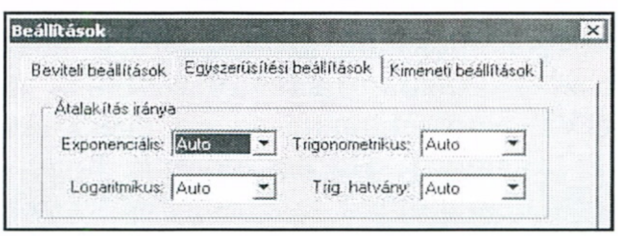
Adjuk ki az **Egyszerűsítés > Kibővít** és a **Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás** utasításokat az alapbeállítással.

```
                                              2
#32:                                2·COS(x)  - 1

                                              2
#33:                                2·COS(x)  - 1
```

Semmi sem változott. Sőt, a kiterjesztés és szorzattá alakítás más szintjén sem történne változás.

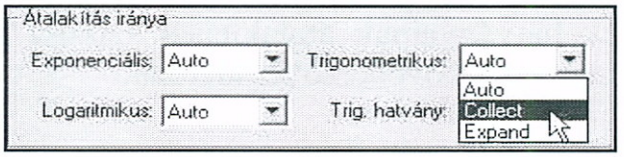
Egy korábbi fejezetben már használtuk a **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** utasítást, hogy a pontosságot beállítsuk. Ebben a párbeszédablakban beállíthatjuk a trigonometriai és más azonosságok alkalmazását is.

A **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** utasítást kiadva készüljünk az egyszerűsítés paramétereinek beállítására.



Két ígéretes beviteli mező is van a dialógusablak **Átalakítás iránya** részében, név szerint a **Trigonometrikus** és a **Trig. hatvány**.

A **Trigonometrikus** pontot állítsuk át **Collect**-re,



... lépjünk ki az OK-val, majd egyszerűsítsünk újra.

```
#34:  Trigonometry := Collect
#35:                                                    COS(2·x)
```

A **Trigonometrikus** pont átállítása **Collect**-re nyilván $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ jobbról balra történő un. addíciós törvény alkalmazását állította be. Ezért a dialógusablak **Átalakítás iránya** elnevezése.

Írjuk be és egyszerűsítsük a $\sin(\alpha+\beta)$ kifejezést. Ne felejtsük el, hogy görög betűket kétféle módon írhatunk be. Egyrészt használhatjuk a görög betűk eszköztárát, illetve a betűk teljes nevét beírhatjuk latin betűkkel : sin(*alpha* + *beta*).

```
#36:  SIN(α + β)
#37:                                                SIN(α + β)
```

Nem meglepő most már, hogy sem az egyszerűsítés, a kiterjesztés, sem a szorzattá alakítás nem változtat tovább ezen a kifejezésen. Ha a **Trigonometrikus** pontot átállítjuk **Expand**-ra, az valószínűleg segít.

Vagy a **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** párbeszédablakban, vagy közvetlenül is beírhatjuk a változó értelmezési tartományának deklarálását: *Trigonometry:=Expand*. Ezután végezzük el újra az egyszerűsítést

```
#38:  Trigonometry := Expand
#39:                                        COS(α)·SIN(β) + SIN(α)·COS(β)
```

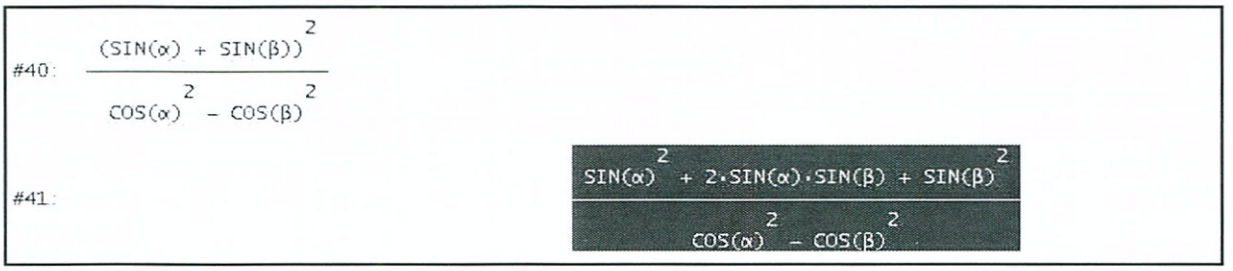
A **Trigonometrikus** mezőben az **Expand** értéket választva ugyanolyan átalakításokat tapasztalunk, mint a főmenüben található **Egyszerűsítés > Kibővít** utasítás hatására. Ha a kettőt összehasonlítjuk, még jobban fogunk emlékezni a trigonometrikus kiterjesztés üzemmódjára.

A **Egyszerűsítés > Kibővít** utasítás az $(x+y)^2$ kifejezést $x^2+2xy+y^2$–re alakítja. Az $x+y$ összegre a legkülső 'négyzetre emelés' érvényes és úgymond szétosztódik az összeadás tagjain. Hasonlóképpen, ha a trigonometrikus kiterjesztés üzemmódja be van kapcsolva, a legkülső 'szinusz' függvény osztódik szét az $\alpha+\beta$ argumentum tagjaira, így adva a szinusz függvény addíciós törvényének megfelelően a $\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$ eredményt. A trigonometrikus **Collect** üzemmód épp az ellentétes műveletet teszi lehetővé: Az egyedi argumentumokat egy, összetett argumentumba foglalja. Hatása hasonló az **Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás** utasítás hatásához.

A trigonometrikus alapbeállítás, az **Automatikus** üzemmód csak akkor hajt végre trigonometrikus egyszerűsítést vagy kiterjesztést, ha az egyértelműen egyszerűsítéshez (kiejtéshez) vezet.

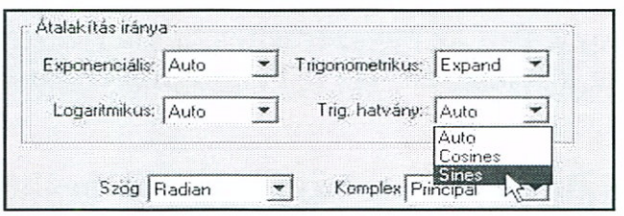
A **Trig. hatvány** a másik menüpont, amelyben a trigonometrikus egyszerűsítéssel összefüggésben választhatunk a beállítási lehetőségek között. Itt szabályozhatjuk a trigonometrikus függvények hatványainak átalakítását szinusz és koszinusz függvények hatványaivá. Tanulmányozzuk ezt a következő feladatban.

💻 Írjuk be és egyszerűsítsük: $\dfrac{(\sin\alpha+\sin\beta)^2}{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$.



Jó néhány trigonometriai függvény hatvány szerepel ebben a kifejezésben. Használjuk a **Trig. hatvány** mezőt ebben a példában.

💻 Állítsuk át ezt a kapcsolót **Sines**-re, megnyitva a **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** menüpontot és a **Trig. hatvány** lenyíló ablakban kiválasztva, ...

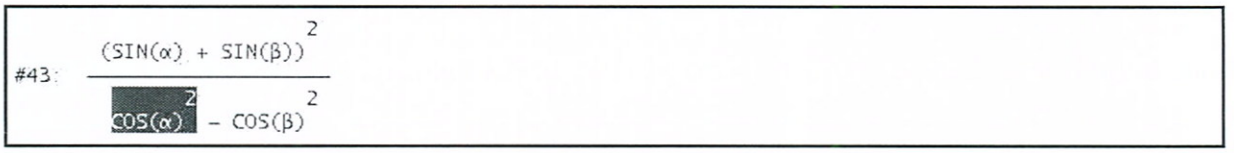


💻 ... és választásunkat megerősítve az OK-val. Egyszerűsítsük a még mindig kijelölt #41 kifejezést.

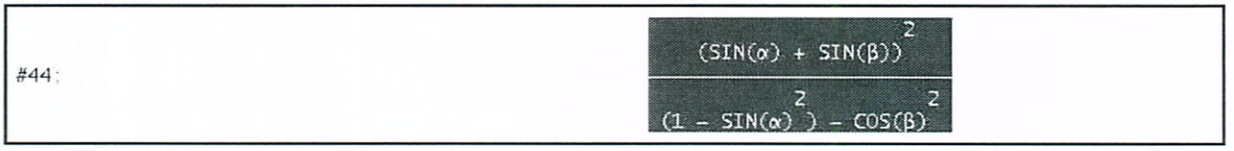
Érdekes lenne ennek a számításnak a lépéseit nyomon követni.[12] Végezzük el a következő lépéseket.

💻 A szóban forgó, jelenleg #40 kifejezést vigyük a munkalapunk végére. Így az most a #43 sorszámot kapja. Jelöljük ki a nevező első tagját, ...

[12] Tanári megjegyzés: Ha lépésenként kérjük az egyszerűsítést a **DERIVE**-tól ahelyett, hogy csak a végeredményt kérjük, igen hasznos lehet a tanulók számára, melyből sokat megtanulhatnak az egyszerűsítés szabályainak alkalmazásáról. Azt is meg kell tanulniuk, hogy dokumentálniuk kell a matematikai munkájukat. A **DERIVE** munkalapok, melyek tartalmazhatnak kifejezéseket, szöveges objektumokat, ábrákat és más beágyazott objektumokat, kiváló lehetőséget adnak arra, hogy a munka dokumentálását a matematika óra fontos részévé tegyük. Ha a **DERIVE**-hoz hasonló technológiát használunk a matematika tanításához, az sok szempontból megváltoztatja a matematika oktatás hangsúlyait. A matematikai dokumentálás egy új aspektus, amelyet át kell gondolnunk.

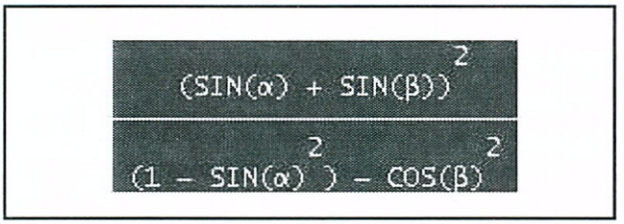


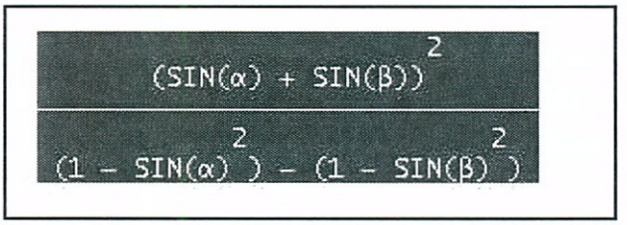
... és egyszerűsítsük.



A $\cos^2\alpha$-t az $1-\sin^2\alpha$ helyettesítette.

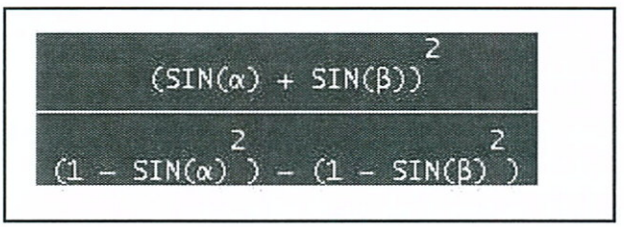
Helyettesítsük a $\cos^2\beta$-t $1-\sin^2\beta$-val. Jelöljük ki a nevező második tagját (bal oldali kép), és egyszerűsítsük.

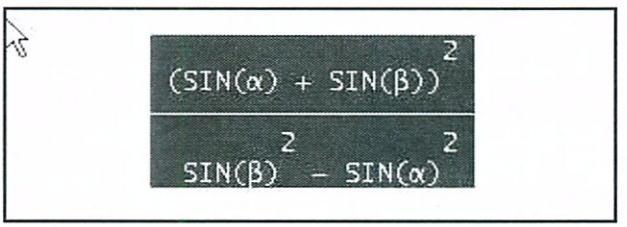




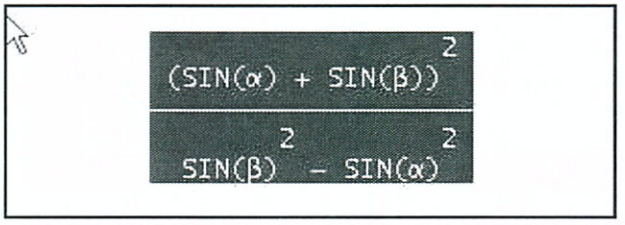
Hozzuk az új nevezőnket $\sin^2\beta-\sin^2\alpha$ alakúra.

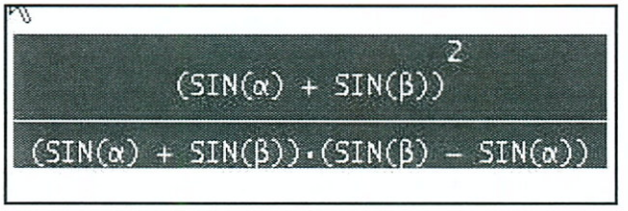
Jelöljük ki a teljes nevezőt, és egyszerűsítsük.



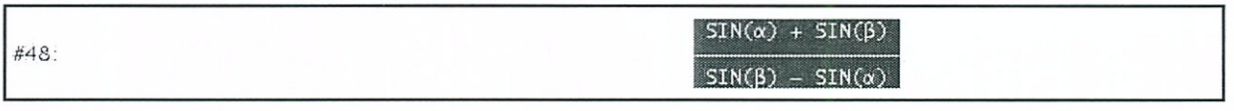


Ismét jelöljük ki a teljes nevezőt, és alkalmazzuk rá az **Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás** parancsot, ...





...majd egyszerűsítsük a = gombbal.



Nézzük a következőkben, hogy kezeli a **DERIVE** a szögegységeket.

Írjuk be a $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kifejezést, egyszerűsítsük, majd számítsunk közelítő értéket.

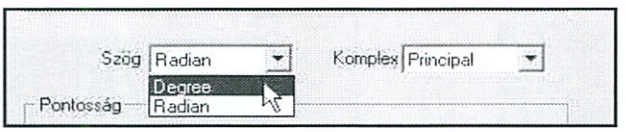
Írjuk be és egyszerűsítsük a *sin 45*-öt, majd számítsunk közelítő értéket.

Nyilvánvalóan látszik, hogy a **DERIVE** a radián üzemmódot használja. Ha radián üzemmódban fokokat akarunk használni, azt a ° jellel (vagy a **DEG** rövidítéssel) tehetjük. A ° jelet és a **DEG** nevesített változót ugyanazon konverziós állandónak tekinti. Az állandót **DEG** formában, vagy a billentyűzet ° jelének leütésével vihetjük be. A megjelenítés minden esetben a ° formában történik.

Írjuk be, egyszerűsítsük, majd számítsunk közelítő értéket: *sin45°+sin(45°)*

Ha a szöget fokban szeretné megadni, a szám után mindig használnia kell a ° jelet. Ha az eredményeket radián helyett fokban szeretné megkapni, azt a **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** menüpontban a megfelelő helyen be kell állítani.

Nyissa meg a **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** menüpontot. Kattintson a **Szög** lenyíló menüre,...



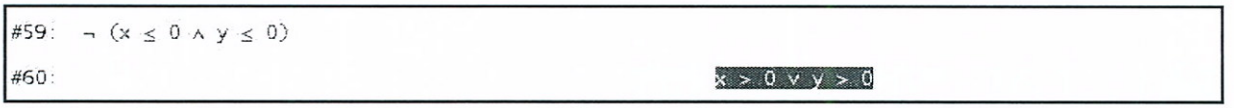
... majd lépjen ki változtatás nélkül a MÉGSE gomb, vagy az ESC billentyű segítségével.

A könyvben szereplő összes példa a radián üzemmódot használja. Ha valaki szívesebben dolgozik fokokkal, ajánlatos az átállítást a munka elkezdésekor megtenni, vagy az indító fájlban új alapértelmezésként venni.

Zárjuk a fejezetet egy másik egyszerűsítési alkalmazással.

A *„nem lehet mind az x, mind az y nem pozitív"* állítás logikai állítás, amit a **DERIVE** segítségével egyszerűsíthetünk. A minimális megszorítás $\neg(x \le 0 \wedge y \le 0)$, ahol $\neg$ a logikai tagadás művelete. A **DERIVE** segítségével egyszerűsítsük .

💻 Írjuk be a fenti kifejezést a következő formában: *not (x<=0 and y<=0)*, majd egyszerűsítsük.



Zárjuk a fejezetet a $u-5 \geq 0 \ \wedge \ u-2 \geq 0$ kifejezés bevitelével, és egyszerűsítésével.

💻 Írjuk be és egyszerűsítsük: *u-5>=0 or u-2>=0*

Amint tapasztalhattuk, a **DERIVE** hatásos algebrai, grafikus és logikai segítséget kínál arra, hogy megvizsgáljuk, milyen hatással van a változók értelmezési tartománya az egyszerűsítésre.

💻 Lépjünk ki a **DERIVE**-ból mentés nélkül.

Összefoglalás

Algebra ablak

Meghatározások > Változó tartománya vagy (:∈) ..... változó tartományának megadása

: Változó neve ..... változó kiválasztása

: Értékkészlet ..... változó értékkészletének megadása

Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások .....

..... kifejezés egyszerűsítési beállításainak megváltoztatása

: Átalakítás iránya .....trigonometrikus, logaritmikus, és exponenciális irányok beállítása a következőképpen:

Expand		**Collect**	
$\sin(x+y)$	$\rightarrow ...\sin(x)...\cos(y)...$	$\sin(x)\cos(y)$	$\rightarrow ...\cos(x-y)...\sin(x+y)...$
$\sin(n\cdot x)$	$\rightarrow ...\sin(x)...\cos(x)...$	$\sin^n(x)$	$\rightarrow ...\sin(m\cdot x)...\sin(k\cdot x)...$
$\ln(x\cdot y)$	$\rightarrow \ln(x)+\ln(y)$	$\ln(x)+\ln(y)$	$\rightarrow \ln(x\cdot y)$
$a^{(x+y)}$	$\rightarrow a^x\cdot a^y$	$a^x\cdot a^y$	$\rightarrow a^{(x+y)}$

: Szög egysége .....radian/degree mód megadása

Függvények

SOLVE..... magában használva: agresszív egyszerűsítés

9. fejezet

Vektorok, mátrixok és halmazok

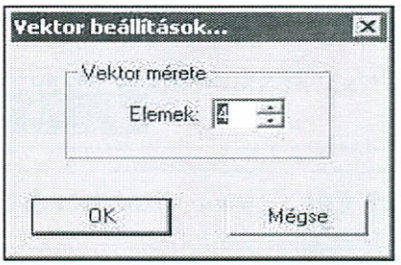
A 6. fejezet bemutatta, hogyan kell vektorokkal dolgozni. Ez a fejezet a vektorokkal és a velük rokon objektumokkal – mátrixok, halmazok – végzett műveleteket és a beépített függvényeiket tárgyalja.

Indítsuk a **DERIVE**-ot alapbeállításban. Írjuk be a következő vektort *[1,2,x]*

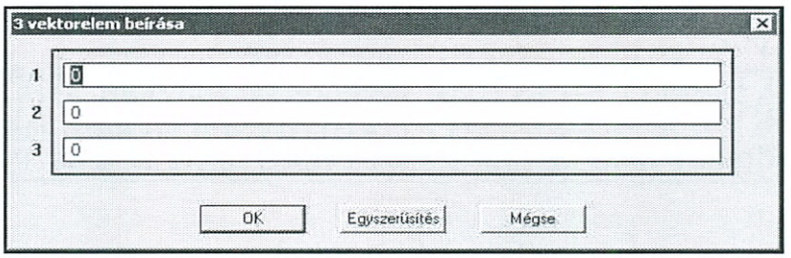
```
#1:   [1, 2, x]
```

Beírhatunk egy vektort a **Képlet készítő > Vektor** utasítással is, vagy a **Vektor beírása** gombot használva.

Vigyük be a $[2, x-1, y]$ vektort a **Vektor beírása** gomb segítségével.



Állítsuk be a vektor méretét 3-ra a **Vektor beállítások** ablak **Elemek** pontjában és lépjünk ki az OK-val.



Írjuk be az első vektorelemet, a 2-t az első beviteli mezőbe, majd menjünk tovább a másodikba a TAB billentyűvel. Írjuk be a második elemet, $x-1$-et a második sorba, a harmadikat, azaz y-t a harmadikba és lépjünk ki a párbeszédablakból az OK-val.

```
#2:   [2, x - 1, y]
```

A vektorokkal a vektor műveletekre vonatkozó alapvető szabályok szerint végezhetünk számításokat.

Adjuk a második vektor háromszorosát az első vektorhoz, beírva a következőt: *#1+3#2=*

```
#3:                    [1, 2, x] + 3·[2, x - 1, y] = [7, 3·x - 1, x + 3·y]
```

A 3.[2,x-1,y] a vektornak egy számmal való szorzását jelöli. Az eredmény egy olyan vektor, melynek minden koordinátája a régi háromszorosa. A **DERIVE** kétféle vektor

szorzatot kínál: a belső szorzat és a kereszt szorzat. Két vektor belső szorzatát (skaláris szorzatot) a 'pont' műveleti jellel írhatunk be, amely a „szabványos" pont billentyűvel, vagy a matematikai szimbólumok eszköztárán található $\boxed{\cdot}$ gombbal vihető be. Ha keresztszorzatot (vektoriális szorzat) akarunk számolni, használjuk a $\boxed{\times}$ gombot, vagy a **CROSS** függvényt.

Számítsuk ki a #1 vektor és a $[a,b,c]$ belső szorzatát. Írjuk be: *#1.[a,b,c]=*

```
#4:                                    [1, 2, x] • [a, b, c] = c•x + a + 2•b
```

Számítsuk ki és egyszerűsítsük a #1 vektor és a $[a,b,c]$ keresztszorzatát. Írjuk be és egyszerűsítsük: *#1×[a,b,c]=*

```
#5:                                    [1, 2, x]•x•[a, b, c] = [2•c - b•x, a•x - c, b - 2•a]
```

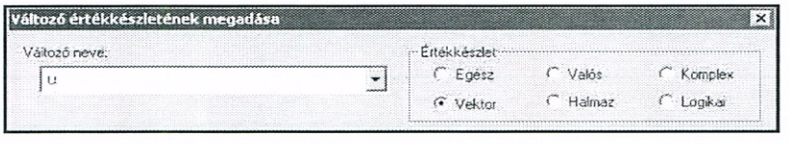
Egy vektor abszolút értékét kiszámíthatjuk a megfelelő képlettel, vagy alkalmazhatjuk a ABS abszolút értékre vonatkozó függvényt a vektorra.

Számítsuk ki a #1 vektor hosszúságát a következőt beírva: *abs(#1)=*

```
#6:                                    |[1, 2, x]| = √(x^2 + 5)
```

Hogy meghatározzunk egy képletet két vektor által bezárt szög kiszámításához, használjuk a $\cos\alpha = \dfrac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{u}|\cdot|\overline{v}|}$ azonosságot átalakítva $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{u}|\cdot|\overline{v}|}\right)$ formává. Alapbeállításként minden változó értelmezési tartománya a valós számok körébe esik. Amennyiben u és v valós számok, a $\dfrac{u\cdot v}{|u|\cdot|v|}$ egyszerűsítésével $sign(u\cdot v)$ kifejezést kapjuk. Amennyiben u és v vektorok, az eredmény nem ugyanez lesz. Éppen ezért u -t és v -t először vektorként kell deklarálnunk.

Deklaráljuk u -t és v -t vektorként. Használjuk a **Képlet készítő > Változó tartománya** utasítást, írjuk be u -t a **Változó neve** mezőbe és kattintsunk a **Vektor** gombra.



Ismételjük meg az eljárást v-re és deklaráljuk vektorként.

```
#7:   u := Vector
#8:   v := Vector
```

Definiáljuk a függvényt a két vektor által bezárt szögre.

Írjuk be a következő azonosságot: *angle(u,v):=acos(uv/(abs(u)abs(v)))*

#9: $\text{angle}(u, v) := \text{ACOS}\left(\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}\right)$

Próbáljuk ki az új ANGLE függvényünket és számítsuk ki az [1,1] és [-1,0] vektorok által bezárt szöget.

Számítsuk ki a szöget, beírva a következőt: *angle([1,1],[-1,0])=*

#10: $\text{angle}([1, 1], [-1, 0]) = \frac{3 \cdot \pi}{4}$

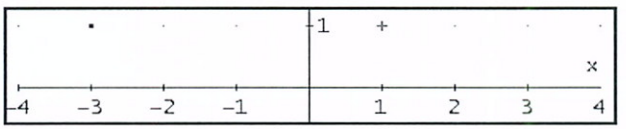
Ha fokokban akarjuk az eredményt, még a függvénydefiníció előtt be kell állítanunk a fok üzemmódot, vagy átállítva a fok üzemmódra újra be kell vinnünk a függvény definícióját.

Tanuljuk meg, hogyan kell megjeleníteni a vektorokat. Használjuk a [-3,1] vektort, amely ebben a formájában egy pontként jelenik meg.

Írjuk be*: [-3,1]*

#11: $[-3, 1]$

Nyissunk egy 2D ábrázolás ablakot, alkalmazzuk az **Ablak > Egymás mellett** utasítást, majd ábrázoljuk a #11-t.



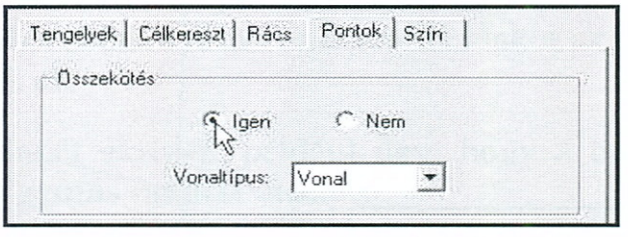
Ha szakaszként ábrázoljuk, a vektort mint nyilat jelenítjük meg, még pontosabb megjelenítési formához jutunk. Adjuk meg a szakaszt két végpontjával. A (0,0) és a (-3,1) a két végpontja annak a vektornak, melynek koordinátái -3 és 1.

Vigyük be a szakaszt, melynek végpontjai (0,0) és (-3,1) olyan vektorként, melynek a két pont az eleme, tehát írjuk be így: *[[0,0],[-3,1]]*

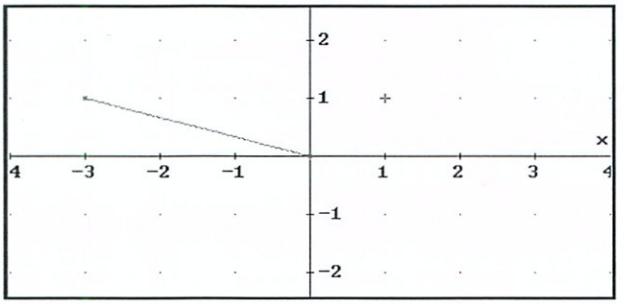
#12: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Ha a #12-t ábrázoljuk, az két pontot jelenít meg. Ha a kettőt összekötő szakaszt is ábrázolni akarjuk, a beállításon némi változtatást kell végrehajtanunk.

Változtassunk a megjelenítés beállításon, hogy a szomszédos pontokat összekösse: alkalmazzuk a 2D ábrázolás ablak **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Pontok** utasítását, kattintsunk az **Összekötés** mezőben az **Igen** gombra, ...



majd lépjünk ki az ablakból az OK-val. Ábrázoljuk a #13-at.



A **Vonaltípus** mezőben különböző vonaltípusokat adhatunk meg, mint például **Vonal**, **Szaggatott** vagy **Pontok**.

Leegyszerűsíthetjük az olyan vektorokat képviselő szakaszok ábrázolását, amelyeknek egyik végpontja az origóban van úgy, hogy definiálunk egy megfelelő függvényt: VECT2D.

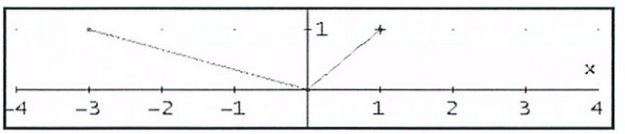
💻 Definiáljuk a VECT2D függvényt beírva a következőt: *vect2d(a,b) := [[0,0],[a,b]]*

```
#13: vect2d(a, b) := [ 0  0 ]
                     [ a  b ]
```

Próbáljuk ki a függvényt, ábrázoljuk a vektort, melynek koordinátái 1 és 1.

💻 Írjuk be: *vect2d(1,1)*

```
#14: vect2d(1, 1)
```

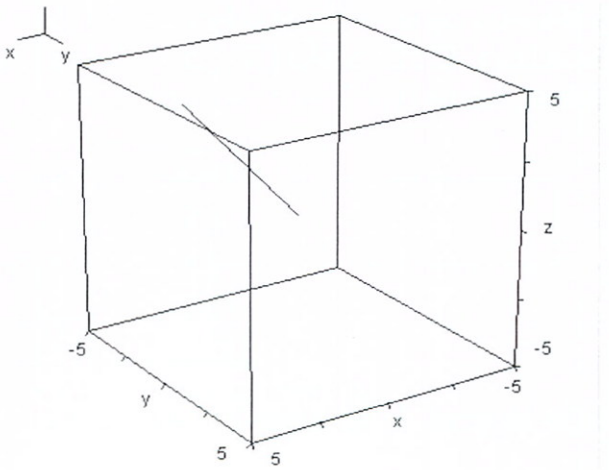


Különféle színeket látunk a képernyőn. Minden alkalommal, mikor indítjuk a **DERIVE**-ot, az az automatikus ciklikus színváltoztatás üzemmóddal indul. Ha ezt nem óhajtjuk, kapcsoljuk ki.

💻 Zárjuk be a 2D ábrázolás ablakot.

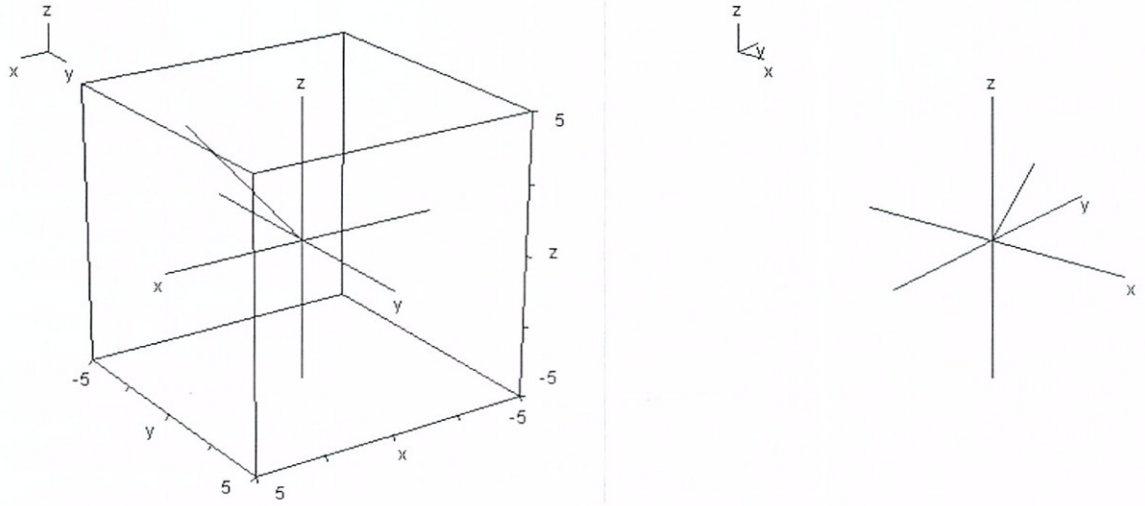
Hogy lehet 3D vektorokat ábrázolni? Nézzük, hogy használhatjuk-e ugyanazokat az eljárásokat, amelyeket a 2D megjelenítésben.

💻 Írjuk be a vektort, melynek koordinátái (3,-2,4) a következőképpen: *[[0,0,0],[3,-2,4]]*. Nyissunk egy 3D ábrázolás ablakot, helyezzük a két ablakot egymás mellé és ábrázoljuk a #14-et.




```
#14: [ 0   0   0 ]
     [ 3  -2   4 ]
```

Kapcsoljuk be a tengelyeket (bal oldali kép). (Emlékezzünk, hogy a leggyorsabban ezt úgy tehetjük, ha az üres területre kattintunk, és ezzel megnyitjuk a **Megjelenítési beállítások** dialógusablakot.) Szüntessük meg a doboz megjelenítését és forgassuk meg az ábrát.

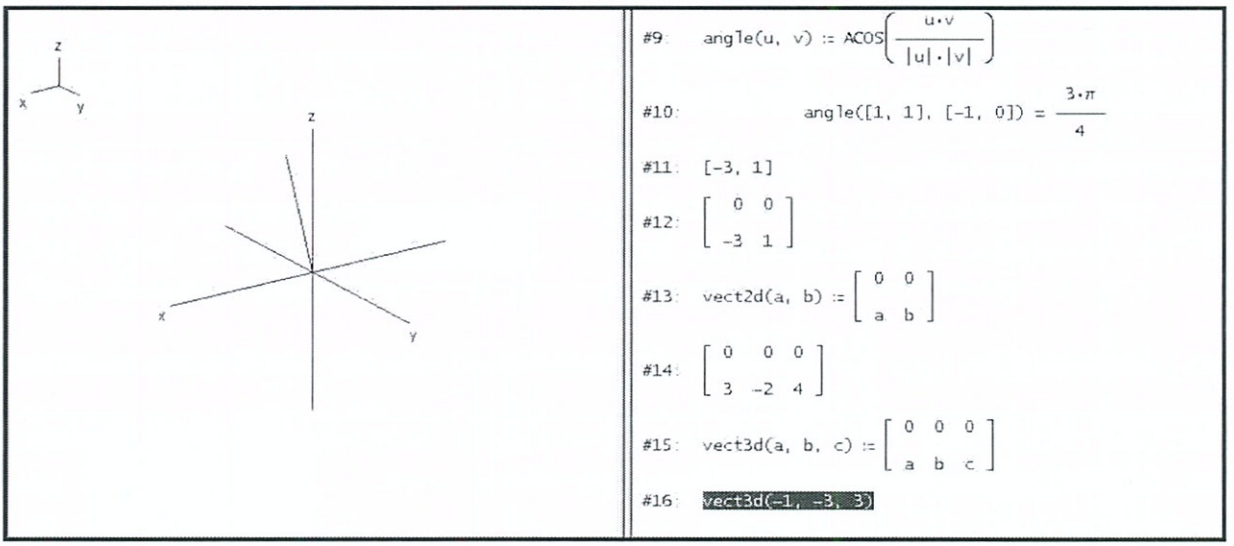


A2D-ben hasznosnak bizonyult a VECT2D függvény. Terjesszük ki a definícióját 3D ábrázolásra is.

Adjuk meg a VECT3D függvényt a következővel: *vect3d(a,b,c) := [[0,0,0],[a,b,c]]*

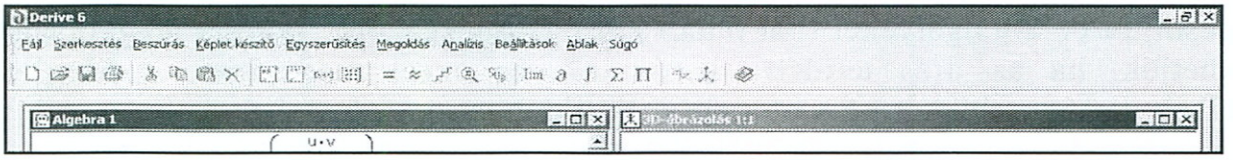
Próbáljuk ki az új függvényt.

Írjuk be a vektort, melynek koordinátái -1,-3, és 3, majd ábrázoljuk.



Ha fel kívánjuk cserélni a két ablakot, azaz az algebra ablakot akarjuk baloldalra helyezni, a következőképpen járhatunk el:

Tegyük az algebra ablakot aktívvá, például úgy, hogy a címsorába kattintunk, majd alkalmazzuk az **Ablak > Egymás mellett** utasítást.



Ez az utasítás mindig az aktív ablakot teszi baloldalra.

Ismerjük a sík három pontját, nevezetesen a (0,0,0), a (-1,-3,3) és a (3,-2,4)-et. Egyik megoldásunk az lehet, hogy használjuk azt az egyenletet, amely azt a feltételt jelenti, hogy egy $T(x, y, z)$ pont a síkba esik. Legyen ez az egyenlet $z = ax + by + c$. Az a, b és c együtthatóit határozzuk meg a három ponttal. Helyettesítsük be a három pontot az egyenletbe úgy, hogy a három ismeretlen, az a, b és c helyén egy három egyenletből álló egyenletrendszert kapjunk. Az egyenletrendszert oldjuk meg a **Megoldás > Rendszer** paranccsal. Ha már ismerjük a, b és c -t, ismerjük a sík egyenletét, tehát tudjuk ábrázolni.

A **DERIVE** beépített **FIT** függvénye is megoldást kínál, hiszen alkalmas a legkisebb négyzetes illeszkedés kiszámítására. A **FIT**(v, D) megadja v paraméteresen megadott vektoról/pontból a D adatmátrixban lévő ponthalmaz pontjaihoz számított távolságok négyzetösszegét minimalizáló feltételt. Ha a paraméteres kifejezés egy sík és az adatmátrix magába foglal három pontot, az illeszkedés tökéletes, a **FIT** megadja azt a síkot, mely mindhárom ponton átmegy. A fenti sík egyenletéhez a v vektor: $[x, y, ax + by + c]$. A D adatmátrix [[0,0,0],[-1,-3,3],[3,-2,4]]. Írjuk be a példánkat két lépésben, először az adatmátrixot, majd a függvényt.

💻 Írjuk be D adatmátrixot: *D:=[0,0,0;-1,-3,3;3,-2,4]*

#17: $D := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

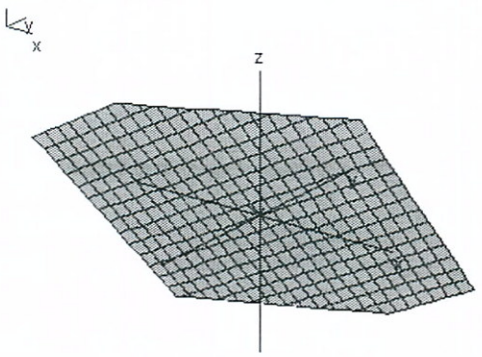
💻 Vigyük be a függvényt és egyszerűsítsünk: *fit([x,y,ax+by+c],D)*

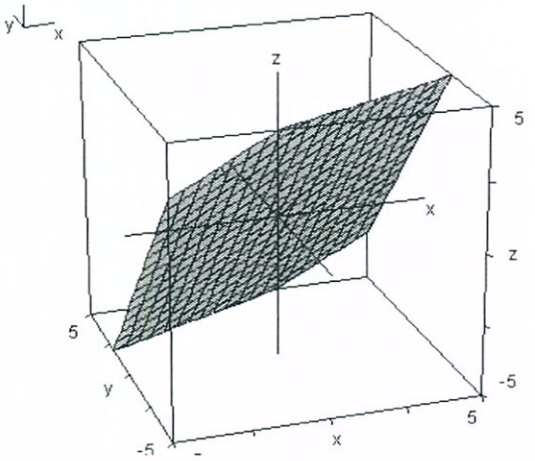
#18: FIT([x, y, a•x + b•y + c], D)

#19: $\frac{6 \cdot x}{11} - \frac{13 \cdot y}{11}$

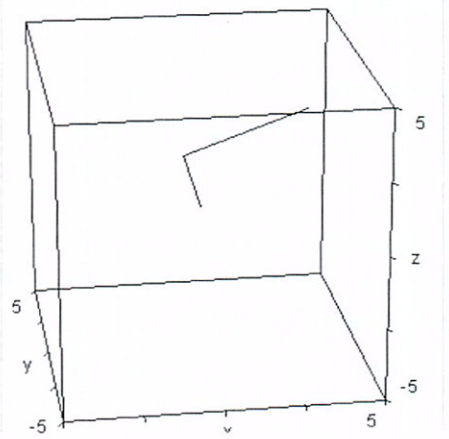
A kapott eredmény a $z = \frac{6x}{11} - \frac{13y}{11}$ sík. Már csak a sík ábrázolása van hátra. A keresztszorzat vektorának és a síknak a viszonylagos helyzetét úgy tanulmányozhatjuk legjobban, ha több különböző pozícióból megnézzük az ábrát.

💻 Ábrázoljuk a #19-et és forgassuk az ábrát.





Töröljünk ki minden ábrát, kapcsoljuk ki a tengelyeket, majd jelöljük ki és ábrázoljuk a *D* adatmátixot.



Most másoljuk a *D* adatmátrixot a beviteli mezőbe, és kicsit változtassunk rajta.

Jelöljük ki a *D* adatmátrixot (#17 kifejezés), és illesszük be az **F3** billentyűvel a beviteli mezőbe. (Ha a mező nem aktív, használjuk az **F3** előtt az **F2** billentyűt.)

```
D := [0, 0, 0; -1, -3, 3; 3, -2, 4]
```

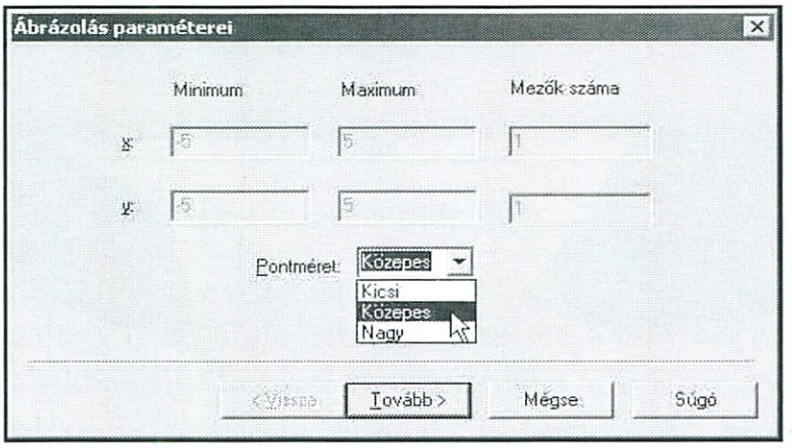
Ez a karaktersorozat különbözik a nemrég általunk megadott mátrix definíciótól. Nyilvánvalóan a pontosvessző az előző kifejezésben a szögletes zárójelek egy rövidítése. (Az eredeti input [[0,0,0],[-1,-3,3],[3,-2,4]] volt.) Változtassuk a kifejezést [[0,0,0];[-1,-3,3];[3,-2,4]] alakúra, majd ábrázoljuk az eredményt.

Változtassuk meg a beviteli mezőben levő kifejezést *[[0,0,0];[-1,-3,3];[3,-2,4]]* alakúra.

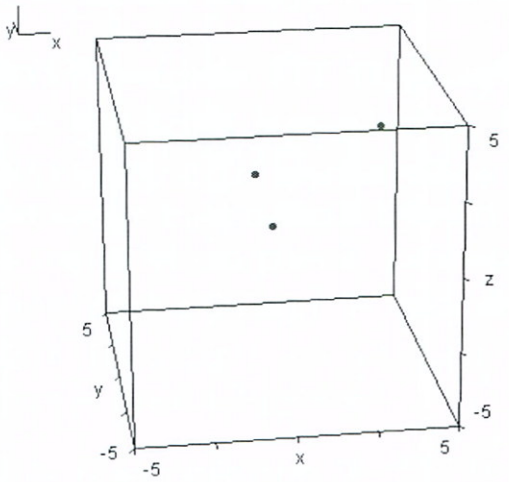
```
#20:  D :=  [ [0, 0, 0]  ]
            [ [-1, -3, 3] ]
            [ [3, -2, 4]  ]
```

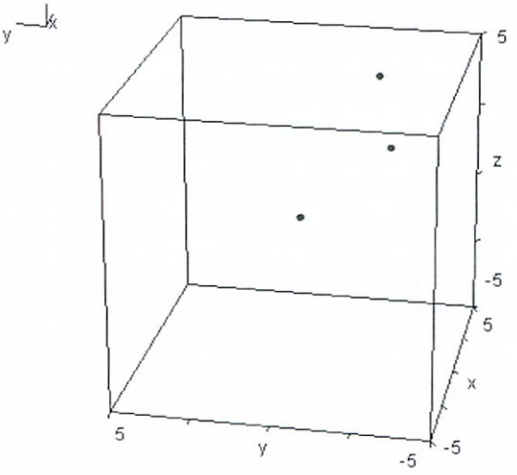
Figyeljük meg a mostani, és az előző *D* ábrája közötti különbséget.

Töröljünk ki minden ábrát, majd használjuk a **Beszúrás > Ábrázolás** parancsot.



Állítsuk át a **Pontméret** mezőt **Közepes**re, majd válasszuk a **Tovább** és a **Befejezés** gombokat.

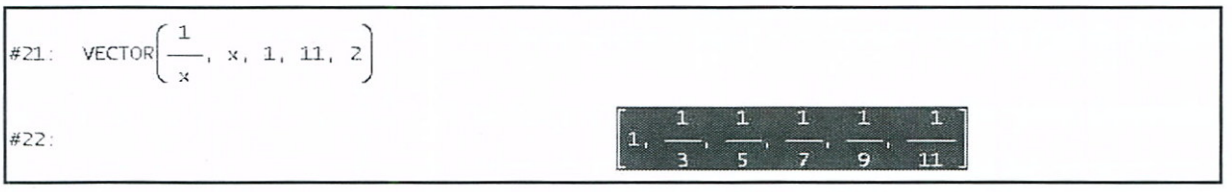




Zárjuk az ábrázolás ablakot, majd nyissuk teljes méretre az algebra ablakot.

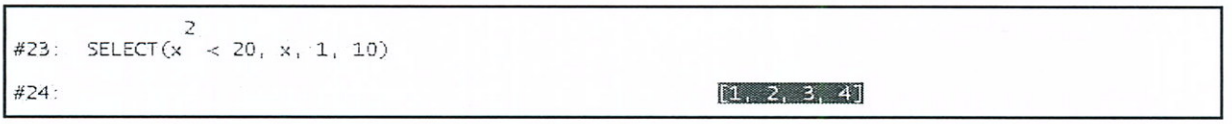
Tanulmányozzunk néhány további függvényt és módszert vektorok létrehozására és feldolgozására. Először idézzük fel a **VECTOR** függvényt és argumentumait. Számítsuk ki az $1/n$ harmonikus sorozat elemeit.

Számítsuk ki az első 6 páratlan elemét, beírva a következőt: *vector(1/x,x,1,11,2)*



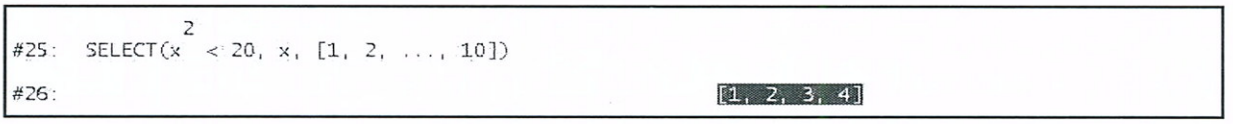
A **SELECT** egy másik függvény, amellyel vektort lehet létrehozni. Hasonló a **VECTOR** függvényhez, bár olyan kifejezés helyett, amely generálja a vektor elemeit, a **SELECT** egy feltételt alkalmaz, mellyel kiválasztja a vektor elemeit vagy kifejezések sorából (melyek az első, az utolsó értékekkel és a léptékkel vannak megadva), vagy egy vektorban megadott kifejezések közül. Például:

Keressük meg azokat az 1 és 10 közötti egész számokat, melyeknek négyzete kisebb, mint 20, beírva a következőt: *select(x^2<20,x,1,10)*



Ebben a példában x változó terjedelme az egész számok köréből 1,2,...,10. Így x azon értékei lesznek elemei az eredmény vektornak, melyek eleget tesznek az $x^2 < 20$ feltételnek

💻 Másik módja annak, hogy megadjuk, hogy x értékei az egész számok körében 1,2,...,10 az, hogy ezeket az értékeket explicite formájában egy vektorral visszük be. A bevitelre használjuk a két pontos felsorolást, megadva az első, második és az utolsó számot. Írjuk be és egyszerűsítsük: *select(x^2<20,x,[1,2,..,10])*



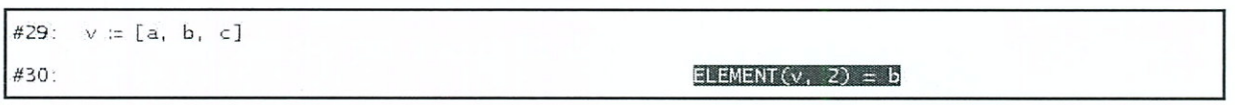
A **DERIVE**-ban használhatjuk a kihagyásos felsorolást egy értéktartomány jelölésére. Figyeljünk a szabályainak pontos betartására. Írásmód: első elem, vessző, második elem, vessző, két pont, vessző, majd az utolsó elem.

Az 1 és 50 közötti prímszámokból álló vektor generálásához használjuk a **SELECT** függvényt, összekapcsolva a **PRIME** függvénnyel. A prímszám az az egynél nagyobb egész szám, amely önmagán és 1-en kívül más számmal nem osztható és 1. **PRIME**(n) hamis eredményt ad, ha n nem prímszám.

💻 Írjuk be és egyszerűsítsük: *select(prime(n),n,1,50)*

Előfordulhat, hogy egy vektor bizonyos elemét ki kell emelnünk. Ezt az **ELEMENT** függvénnyel végezhetjük el, melyhez a **DERIVE** tartalmaz több egyenértékű infix operátort. Próbáljuk ki ezeket a függvényeket egy általános vektoron, melynek három eleme *a*, *b* és *c*.

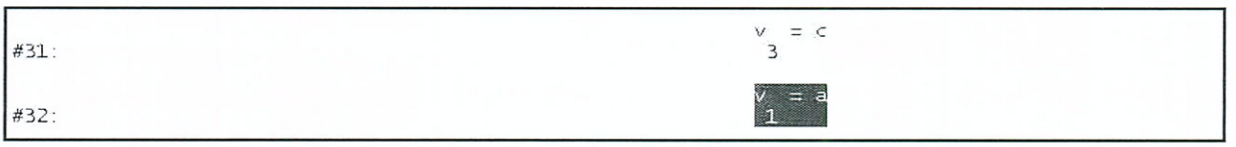
💻 Az [a, b, c] általános vektort rendeljük a *v* változóhoz, majd emeljük ki a második tagját, beírva a következőt: *element(v,2)=*



Az **ELEMENT** függvény helyett használhatjuk a **SUB** infix operátort, vagy a lefelé nyilat [↓].

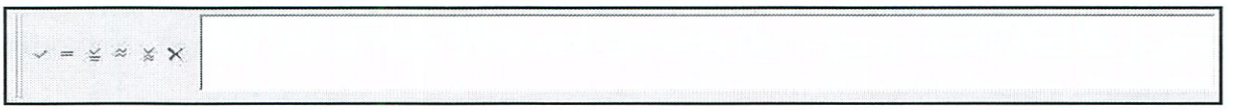
💻 Emeljük ki a v harmadik és első elemét a következőképpen: *v sub 3=* és: *v↓1=*

(A ↓ jelet a matematikai szimbólumok eszköztárból válasszuk.)



Következzenek a mátrixok. Már használtuk a vektorok vektorait korábban. Mátrixok formájában kerültek megjelenítésre. A **DERIVE**-ban egy mátrix a vektorok vektora. Bevitelükre többféle lehetőségünk van. Írjuk be a beviteli sor segítségével az $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ x & x-1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$-et, majd a **Mátrix beírása** gombot ⊞ használva (a **Képlet készítő > Mátrix** utasítás ezzel egyenértékű) az $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot.

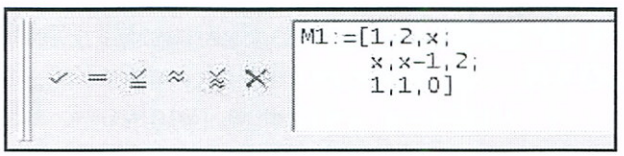
💻 Töröljük ki a bemeneti sor tartalmát a ✕ gombbal. Használjuk a **Beállítások > Megjelenítés > Többsoros kifejezések bevitele** menüpontot.

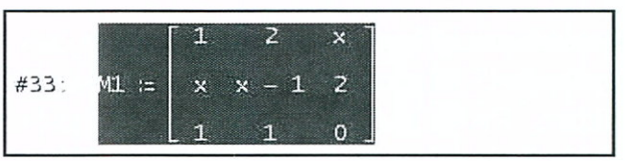


Így a kifejezés beviteli mezőnek négy sora lesz. Többsoros kifejezés beírásakor ALT+ENTER segítségével lehet új sort nyitni. Több, mint négy sor esetén függőleges görgető segítségével mozoghatunk a mezőben.

💻 Írjuk be az M_1 mátrixot három sor, és pontosvesszők segítségével a következő módon:

M1:=[1,2,x; ALT+ENTER
x,x-1,2; ALT+ENTER
1,1,0] ENTER

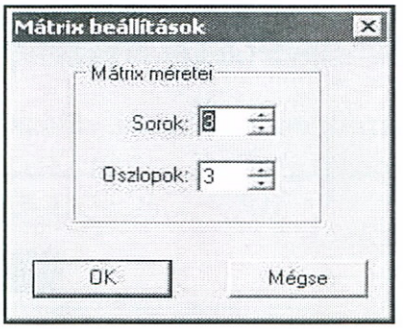




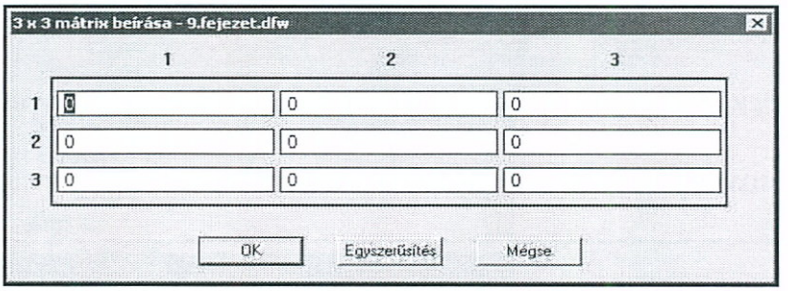
💻 Kapcsoljuk ki a többsoros bemeneti mező funkciót a **Beállítások > Megjelenítés > Többsoros kifejezések bevitele** menüpont segítségével.

Figyeljük meg, hogy bár még mindig karakter üzemmódban vagyunk, melyben egy változó csak egy karaktert tartalmazhat, a hozzárendelő kifejezés bal oldala, ami jelen estben az $M1$, bármilyen hosszúságú lehet.

💻 Írjuk be M_2-t a **Mátrix beírása** gombot ⊞ használva:



Adjuk meg a mátrix dimenzióját a sorok és oszlopok számának beírásával. Fogadjuk el a felajánlott 3-at a **Sorok** és az **Oszlopok** mezőben is az OK-val.



A 3 x 3-as mátrix mezőiben nullákat látunk. Írjuk felül a nullát a megfelelő értékekkel. A mezők közötti lépkedésre használjuk a ⇆ TAB billentyűt. Mint máshol is az ENTER ↵ billentyű kilép a dialógusablakból, és ha túl korán használjuk, sok elem nulla marad szándékunk ellenére. Kezdjük az első sorban az első oszloppal (a fenti képen a bal felső sarok).

Írjuk be a 3-at és használjuk a ⇆ billentyűt, hogy továbblépjünk a következő mezőbe. 4 ⇆ -2. Töltsük ki a másik két sort is, majd lépjünk ki az ablakból az OK gombbal.

$$\#34: \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A #46 még nem kapott nevet. Tároljuk M2 néven.

Írjuk be: *M2 :=#34*

$$\#35: M2 := \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Két mátrix összeadása vagy egy mátrix szorzása egy számmal ugyanolyan egyszerű és egyértelmű, mint azt a vektoroknál láttuk. A pont műveleti jel használata a mátrix szorzását jelöli. (Emlékeztető: A fentebb definiált M1 és M2-es mátrixok jelölésére használhatunk kisbetűket is.)

Adjuk össze a két mátrixot: *m1+m2=*

$$\#36: M1 + M2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & x - 2 \\ x + 1 & x - 4 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Szorozzuk meg az M2-t 3-al. Írjuk be: *3m2=*

$$\#37: 3 \cdot M2 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & -6 \\ 3 & -9 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Szorozzuk össze a két mátrixot: *m1.m2=*

#38:

$$M1 \cdot M2 = \begin{bmatrix} 2 \cdot x + 5 & -2 & x + 2 \\ 4 \cdot x + 3 & x + 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix inverzét úgy számítjuk ki, hogy vesszük a -1-dik hatványát.

Számítsuk ki M_1 inverzét, beírva a következőt: *m1^-1=*

#39:

$$M1^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{x+2} & \frac{x}{x+2} & -\frac{x^2 - x - 4}{x+2} \\ \frac{2}{x+2} & -\frac{x}{x+2} & \frac{2}{x+2} + x - 2 \\ \frac{1}{x+2} & \frac{1}{x+2} & -\frac{x+1}{x+2} \end{bmatrix}$$

A determinánst a **DET** függvénnyel számíthatjuk ki.

Számítsuk ki M_1 determinánsát a *det(m1)=* beírásával.

#40:

$$DET(M1) = x + 2$$

Egy mátrix transzponálását úgy végezhetjük el, hogy a sorok és oszlopok szerepét felcseréljük: az első sor lesz az első oszlop stb. A **DERIVE** a hátra dőlő hangsúlyjelet használja a mátrix transzponálás műveleti jeleként. (Az európai billentyűzeteken legtöbbször csak azután jelenik meg, ha utána egy szimbólumot, a szóköz billentyűt vagy az egyenlőség jelet beírunk.) A transzponálás műveleti jele megtalálható a matematikai jelek eszközsorban vagy elérhető a CTRL+T billentyűkombinációval.

Transzponáljuk az M_1-et, beírva a következőt: *m1`=*

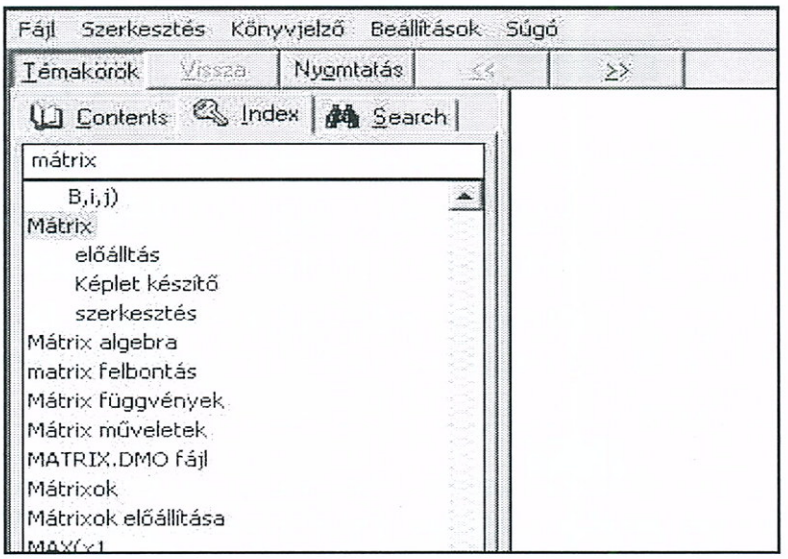
#41:

$$M1' = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & x - 1 & 1 \\ x & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

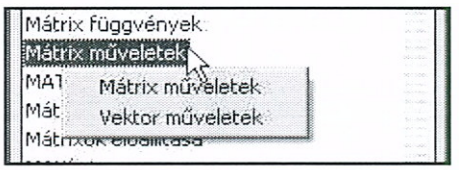
Nem-négyzetes mátrixokkal is dolgozhatunk, feltéve, hogy az adott művelethez, pl. összeadás, szorzás stb., a dimenziójuk megfelelő. Ha még többet akarunk megtudni a **DERIVE**-val végezhető mátrix műveletekről, használhatjuk az **online** segítséget.

Keressük a *mátrix* címszót. Indítsuk a **Súgó > Súgó** utasítást.

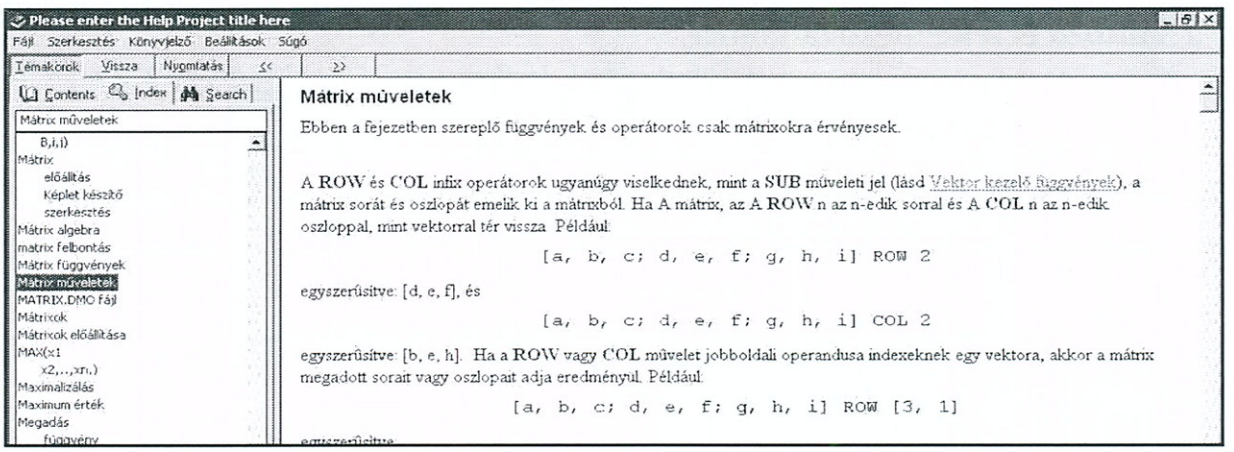
Kattintsunk az **Index** feliratra (a második sorban), és írjuk be a beviteli mezőbe a *mátrix* szót…



… majd kattintsunk duplán a **Mátrix műveletek** sorba (ez a jelenleg kijelölt alatt látható 7 sorral.)



Válasszuk ki a **Mátrix műveletek** menüpontot ezen a listán is.



Zárjuk be a **DERIVE 6 Súgó** ablakot a ☒ gombra kattintva.

Sokféle lehetőség áll rendelkezésünkre, hogy sorokat, oszlopokat vagy elemeket emeljünk ki a mátrixokból. Mind az **ELEMENTS** mind, pedig a **SUB** operátor használható, hiszen a mátrix nem más, mint vektorok vektora. Sorok és oszlopok kiemelésére használható a **ROW** és a **COL** infix operátor is. Gyakorlásképpen végezzük el a következő feladatokat..

Írjuk be a következő általános mátrixot $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ a következőképpen:

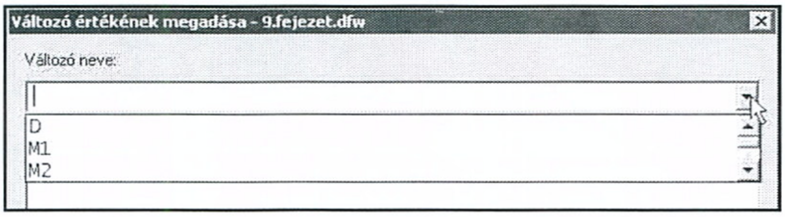
m:=[a,b,c;d,e,f;g,h,i], majd emeljük ki a második sort: *m sub 2=*

$$\#42:\quad m := \begin{bmatrix} a & b & c \\ D & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\#43:\quad m_2 = \left[\begin{bmatrix} [0, 0, 0] \\ [-1, -3, 3] \\ [3, -2, 4] \end{bmatrix}, e, f \right]$$

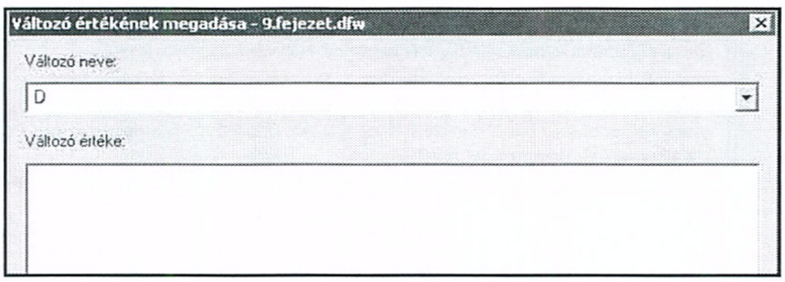
Mi történt? A d változót egy mátrixszá egyszerűsítette. Emlékezzünk, hogy ebben a fejezetben a **FIT** függvénynél találkoztunk egy *D* adatmátrixszal. Azt is észrevehetjük megnézve a #60-t, hogy a mátrix minden eleme kisbetűs, kivéve a D-t. Mivel alapbeállításban a **DERIVE** kis- és nagybetűt megkülönböztető üzemmódban dolgozik, d-t az ismert D-ként értelmezte.

Nézzük meg az összes változót, amelyekhez ez idáig értéket rendeltünk. Indítsuk a **Képlet készítő > Változó értéke** utasítást, majd nyissuk meg a **Változó neve** lenyíló ablakot.



Ebben a dialógusablakban töröljük D értékét, hogy újra változóként használhassuk.

Töröljük a D értékét a következőképpen: Válasszuk ki D-t a lenyíló ablakban és töröljük a **Változó értéke** mező tartalmát…



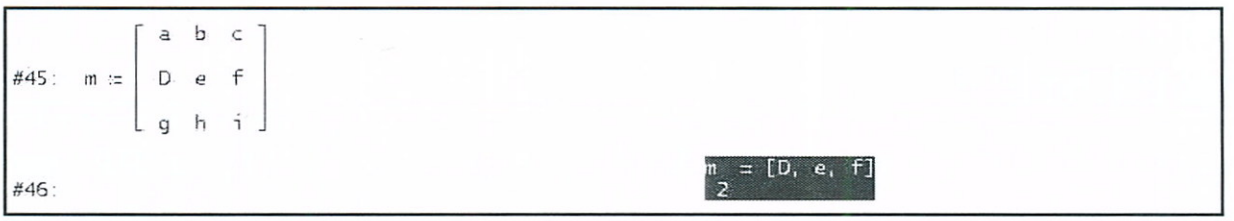
… és erősítsük meg a változtatást az OK-val.

$$\#44:\quad D :=$$

Figyeljük meg a **Képlet készítő > Változó értéke** utasítás által generált #44-t. Egy változóhoz hozzárendelt értéket törölhetünk úgy is, hogy a #44-hez hasonló kifejezést viszünk be közvetlenül a beviteli soron keresztül.

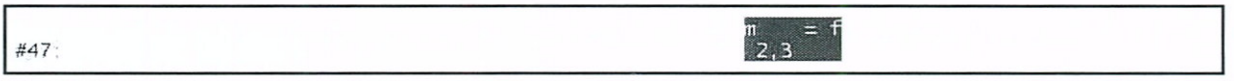
Vissza a mátrix kiemelési gyakorlatokhoz.

Vigyük be újra a 3 x 3-as általános mátrixot, majd az *m sub 2=* beírásával emeljük ki a második sort.

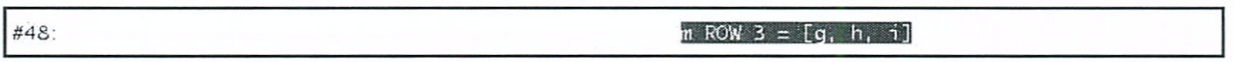


A második sor első eleme, a d még midig nagybetűvel jelent meg, de már nincs értéke. A kis- és nagybetűt megkülönböztető üzemmódban a **DERIVE** utalhat a d -re D -ként is. Ha ragaszkodunk a d írásmódhoz, vezessük be az alapértelmezett d változót: *d:=*

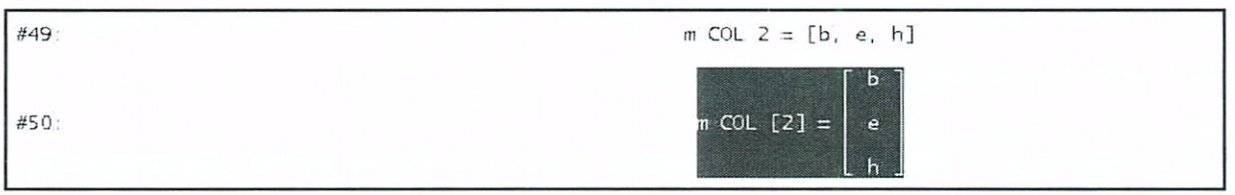
Emeljük ki a második sor harmadik elemét a *sub 3*-at hozzáírva az előző beviteli sorhoz: *m sub 2 sub 3=*



Emeljük ki a 3. sort még könnyebben megjegyezhető formulával: *m row 3=*

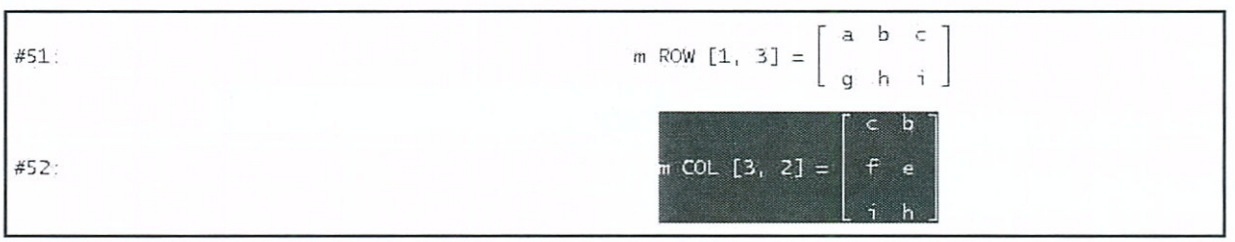


Vegyük ki a 2. oszlopot először, mint sorvektort, *m col 2 =*, majd mint oszlopvektort, *m col [2]=*



A **ROW** és a **COL** operátorok elfogadnak indexlistákat is.

Szerkesszünk egy mátrixot, kiemelve az m első és harmadik sorát: *m row [1,3]=*. Szerkesszünk egy mátrixot, kiemelve az m harmadik és második oszlopát: *m col [3,2]=*



Amint azt az utóbbi két példa mutatja, a ROW és COL használható a mátrix sorainak és oszlopainak felcseréléséhez is.

A **DERIVE** képes halmazokat és halmazokkal végzett műveleteket is kezelni. A standard matematikai jelölésnek megfelelően a halmazok jelölésére a kapcsos zárójelet használja. Számítsuk ki az $S=\{1,2,3\}$ és az $P=\{2,3,4,5\}$ halmazok metszetét, unióját és különbségét. A megfelelő műveleti jeleket a matematikai jelek eszköztárból vehetjük.

Írjuk be S-et: *S :={1,2,3}* és P-t: *P :={2,3,4,5}*

A metszetet az S ∩ P=, az uniót az S ∪ P= , a különbséget pedig az S\P= beírásával kapjuk.

Az ∪,∩ operátorok helyett begépelhetjük az **INTERSECTION** vagy **UNION** kifejezéseket, például: *S union P*

Számítsuk ki S hatványsorát, azaz az S összes lehetséges részhalmazának halmazát.

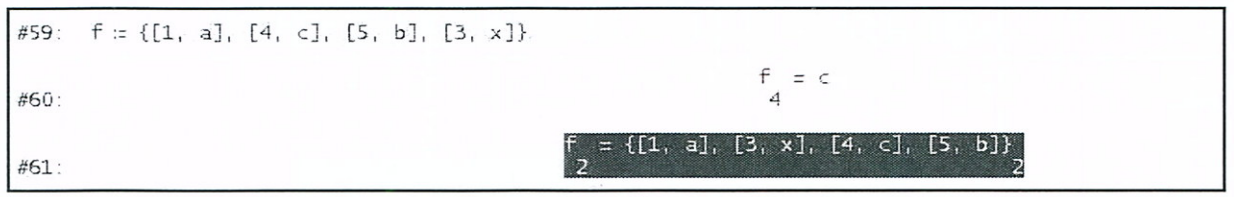
Az S hatványhalmazát a *power_set(S)*= beírásával kapjuk.

A halmaz elemeinek megadására is használhatjuk a két pontos felsorolást. Például használjuk a {1,3,…,9} kifejezést az egyjegyű páratlan egész számokra.

Egy függvény grafikonja rendezett párok halmazával kerül meghatározásra: $G_1 = \{(x, y) | x \in D_f \wedge y = f(x)\}$.

A **DERIVE**-ban egy f függvényt beírhatunk ilyen rendezett párok halmazaként. Ha ezt választjuk, használjuk a **SUB** operátort a függvényérték megkeresésére.

Írjuk be a következő függvényt: *f :={[1,a],[4,c],[5,b],[3,x]}*. A függvény 4-hez tartozó értékét az *f sub 4*= beírásával kapjuk. Keressük a függvényértéket 2-re: *f sub 2*=



Lépjünk ki mentés nélkül a **DERIVE**-ból.

Összefoglalás

Algebra ablak

vagy **Képlet készítő > Vektor** ..... új vektor beírása az aktív munkalapra

vagy **Képlet készítő > Mátrix**..... új mátrix beírása az aktív munkalapra

Meghatározások > Változó értéke ..... változó értékének megadása

Súgó > Tárgymutató ..... súgó a megadott témáról

2 D- ábrázolás ablak

Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Pontok: Összekötés.....

.....pontok közti vonalak összekötése

Függvények és műveleti jelek

ABS..... abszolút érték / vektor hossza

COL ..... vektor oszlopainak kiemelése

CROSS.....vektorok keresztszorzata

DET.....mátrix determinánsa

ELEMENT *vagy* SUB vagy ↓.....a lista/vektor egy elemének kiemelése

FIT.....legkisebb négyzetes illeszkedés

INTERSECTION *vagy* ∩ .....halmazok metszete

POWER_SET ..... összes részhalmaz

PRIME ..... prím teszt

ROW .....vektor sorainak kiemelése

SELECT .....feltételeknek megfelelő vektor generálása

UNION vagy ∪ .....halmazok uniója

\.....halmazok különbsége

. ..... két vektor skaláris szorzata

` vagy CTRL + T ..... mátrix transzponálása

10. fejezet

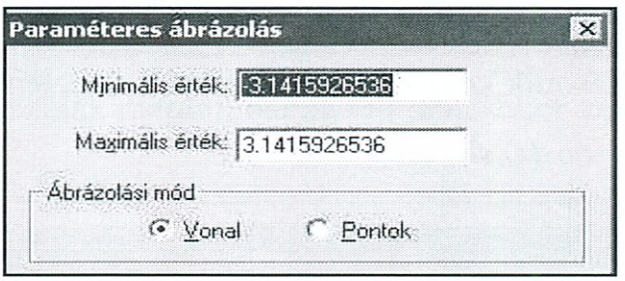
Paraméteres ábrázolás

A **DERIVE** képes az $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ paraméterekkel megadott ábrák megjelenítésére is. Ebben a fejezetben megismerkedünk azzal, hogy kell a két-, és háromdimenziós parametrikus ábrákat használnunk.

Indítsuk a **DERIVE**-ot alapbeállítással. Írjuk be az $x = \cos t$, $y = \sin t$ függvényt úgy, mint egy kéttagú vektort: *[cos(t),sin(t)]*

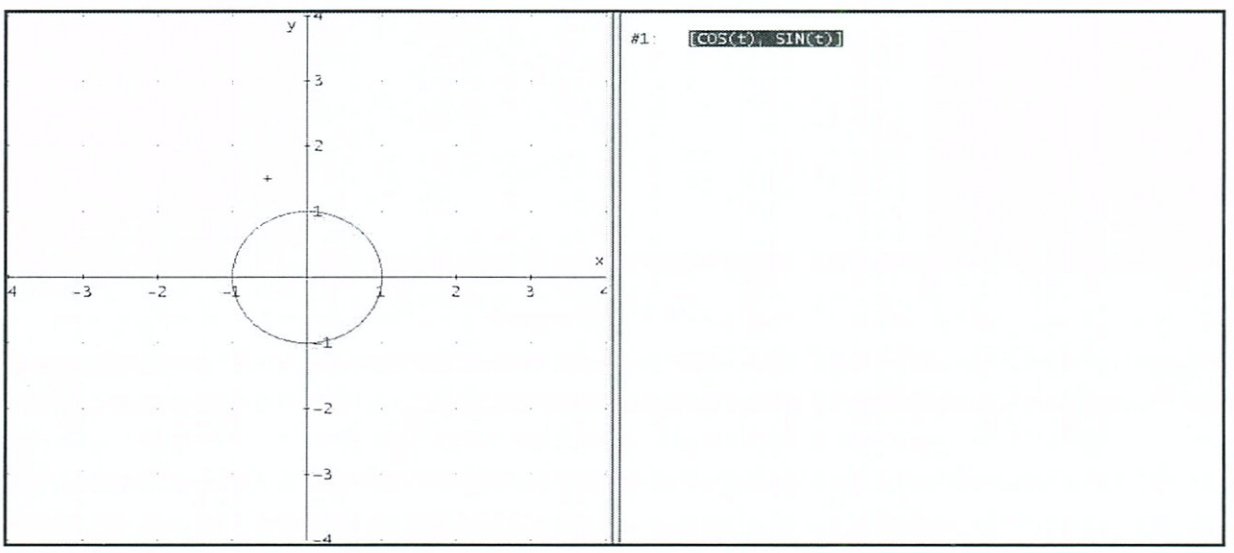
```
#1:  [COS(t), SIN(t)]
```

Jelenítsük meg ezt a függvényt. Nyissunk egy 2D-ábrázolás ablakot, helyezzük el a két ablakot egymás mellett és ábrázoljuk a #1 kifejezést.



Ahelyett, hogy azonnal megjelenítené az ábrát, a **DERIVE** egy dialógusablakot nyit, hogy megadjuk a paraméter, adott esetben a t tartományát és az ábrázolási módot. Felkínál egy $-\pi$ **Minimális érték**-et (alsó határ) és egy π **Maximális érték**-et (felső határ) és az **Ábrázolási mód** mezőben a **Vonal** lehetőséget.

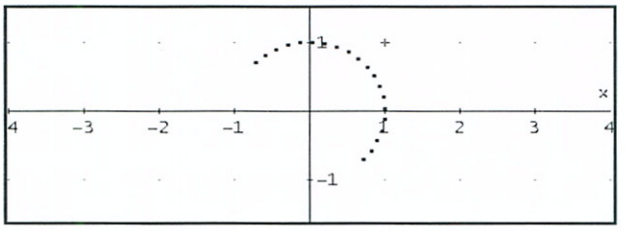
Fogadjuk el a fejkínált értékeket. Az OK-val.



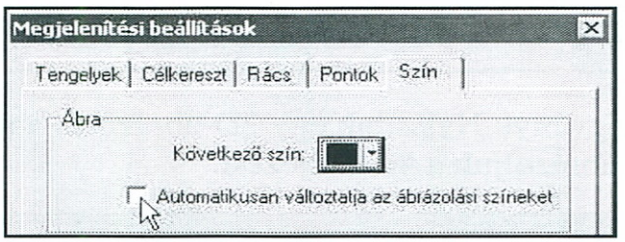
A kör nem látszik tökéletes kör alakúnak, használjuk a **Beállítások > Képméretarány** utasítást, ahogy azt a 4. fejezetben leírtuk.

Ha csak a kör egy részét akarjuk megrajzolni, ennek megfelelően kell változtatnunk a paraméter tartományt.

Töröljük a kört és ábrázoljuk a újra a gombbal. Állítsuk a **Minimális értéket** –pi/4-re és a **Maximális értéket** 3pi/4-re, az **Ábrázolási módot** pedig Pontokra.



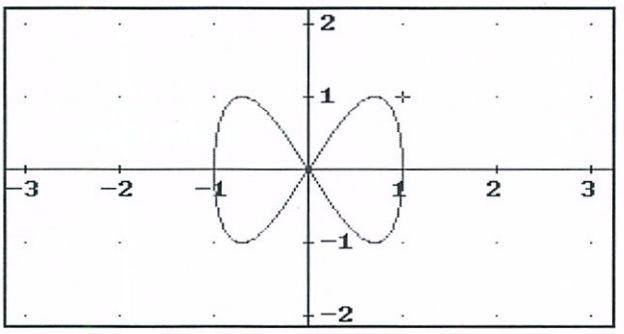
Kapcsoljuk ki az ábrázolási színek automatikus változtatása üzemmódot a **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Szín** fülecskéjén levő **Automatikusan változtatja az ábrázolási színeket** menüpontban, és válasszunk egy ábrázolási színt.



Változtassuk a függvény második koordinátáját *sin(2t)*-re és jelenítsük meg az új görbét.

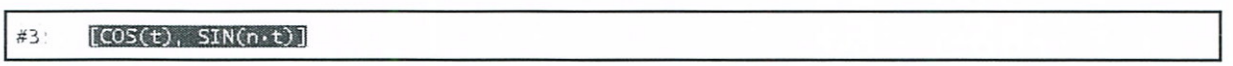
Vigyük be az új görbét: *[cos(t),sin(2t)]*

Miután töröltünk minden korábbi ábrát, jelenítsük meg az új függvényt. A törléshez használjuk a 2D-ábrázolás ablak **Szerkesztés > Összes ábra törlése** utasítását, majd ábrázoljuk a #2 kifejezést. Legyen t -pi-től pi-ig, az **Ábrázolási mód** mezőben válasszuk a **Vonal** pontot.



Figyeljük meg a görbe alakjának változását, mikor az $[x, y] = [\cos t, \sin t]$ helyett a $[x, y] = [\cos t, \sin 2t]$ -t ábrázoljuk. A görbék egy családjának segítségével vizsgáljuk meg az 1, 2, 3, 4 és 5 egész paraméterek használatát a szinusz argumentumában.

Generáljunk görbéket : $[x, y] = [\cos t, \sin(nt)]$, ahol az n terjedelme 1-től 5-ig tart és a lépésköz 1. Írjuk be a kifejezést: *[cos(t),sin(nt)]*.



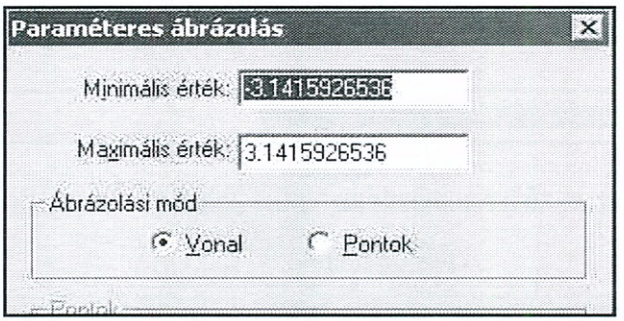
Indítsuk az **Analízis > Vektor** utasítást, a **Végérték** értékét vegyük 5-nek.

Számítsuk ki a vektort az EGYSZERŰSÍTÉS gombra kattintva.

```
#4:   VECTOR([COS(t), SIN(n·t)], n, 1, 5, 1)

                                        COS(t)   SIN(t)
                                        COS(t)   SIN(2·t)
#5:                                     COS(t)   SIN(3·t)
                                        COS(t)   SIN(4·t)
                                        COS(t)   SIN(5·t)
```

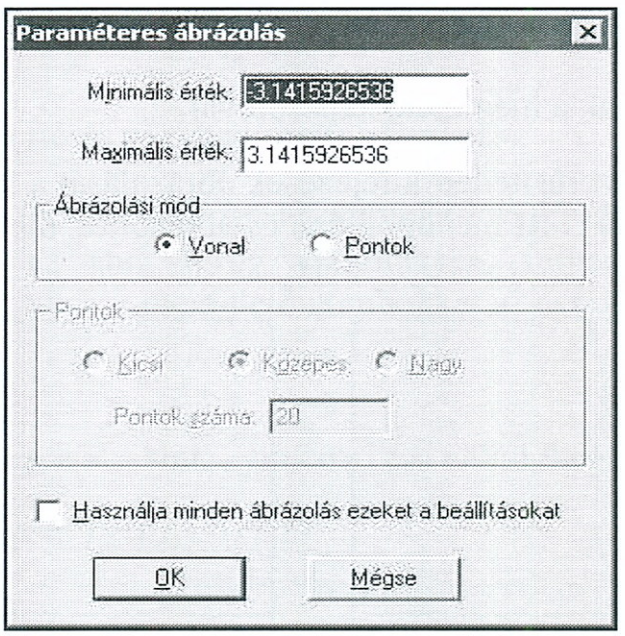
Ábrázoljuk a görbéket.

Töröljük az összes előző ábrát, majd ábrázoljuk a #5 kifejezést. Fogadjuk el a **Paraméteres ábrázolás** dialógusablakban felkínált értékeket az OK-val.



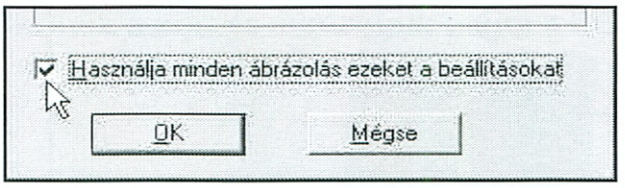
Meglepő módon a dialógusablak maradt, bár az OK leütésekor volt egy rövid villanás.

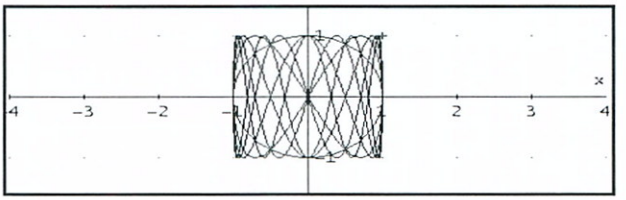
Kattintsunk ismét az OK gombra.



A dialógusablak még mindig itt van. Ennek az az oka, hogy öt ábrát akarunk megjeleníteni. (Ne felejtsük el, hogy a kifejezéscsaládnak öt eleme van.) Ezért ötször kell válaszolnunk az ábrázolás paramétereire vonatkozó kérdésekre, hiszen előfordulhat, hogy a vektor különböző elemeire különböző paramétereket akarunk alkalmazni. Ha a vektor összes további elemére ugyanazokat a paramétereket akarjuk alkalmazni, használjuk a **Használja minden ábrázolás ezeket a beállításokat** kapcsolót, amely az OK gomb felett található.

Kattintsunk a **Használja minden ábrázolás ezeket a beállításokat** mezőbe és lépjünk ki az OK-val.



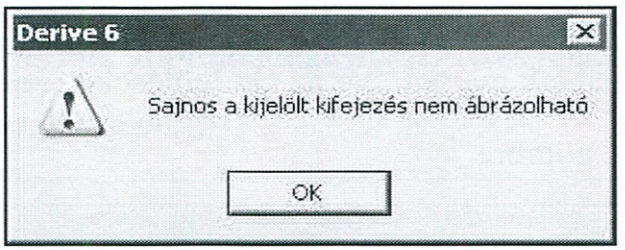


Jobb lenne az öt ábrát úgy megjeleníteni, hogy ne fedjék egymást. Így könnyebben összehasonlíthatnánk őket. Ehhez el kell a függvényt tolnunk az y tengely mentén. Ilyen átalakítást a *sin(nt)*-hez megfelelő kifejezéseket hozzáadva érhetünk el. Első próbálkozásként adjunk n -t a **VECTOR** kifejezés y koordinátájához.

💻 Másoljuk a **VECTOR** kifejezést a beviteli sorba: Jelöljük ki, az **F2**-vel tegyük a beviteli sort aktívvá, majd a #4 kifejezést másoljuk be az **F3**-al. Írjuk be a $+3n-9-t\ a\ sin(nt)$ után és vigyük be az új kifejezést.

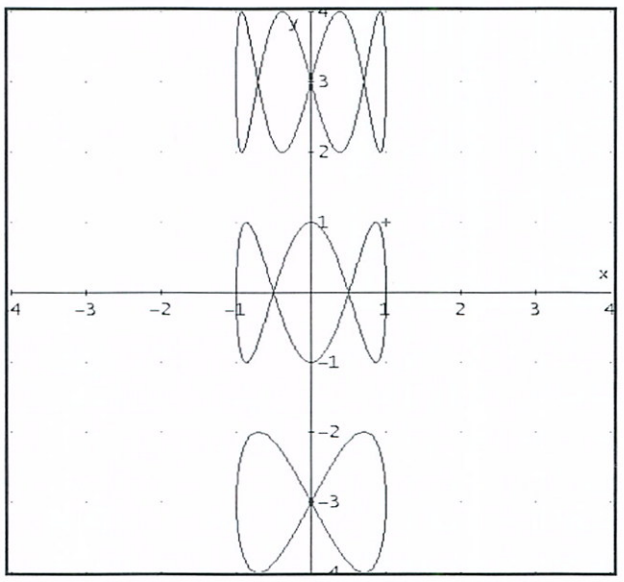
```
#6:  VECTOR([COS(t), SIN(n·t) + 3·n - 9], n, 1, 5, 1)
```

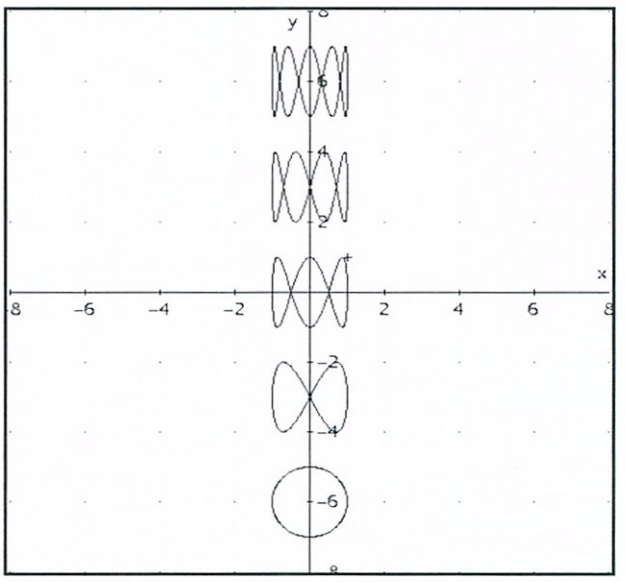
💻 A **Szerkesztés > Összes ábra törlése** utasítással töröljük az eddigi ábrákat, majd ábrázoljuk a #6 kifejezést.



Ezen egyszerűen segíthetünk a megfelelő kapcsolóval.

💻 Engedélyezzük az egyszerűsítetlen kifejezések ábrázolását a **Megjelenítési lehetőségek > Egyszerűsítés ábrázolás előtt** menüpontban és ábrázoljuk most a #6-ot (bal oldali kép). Távolodjunk el.





Így már összehasonlíthatjuk a görbék alakját és tanulmányozhatjuk a n paraméter hatását a $[x, y] = [\cos t, \sin(nt)]$ kifejezésre.

💻 Zárjuk be a 2D-ábrázolás ablakot.

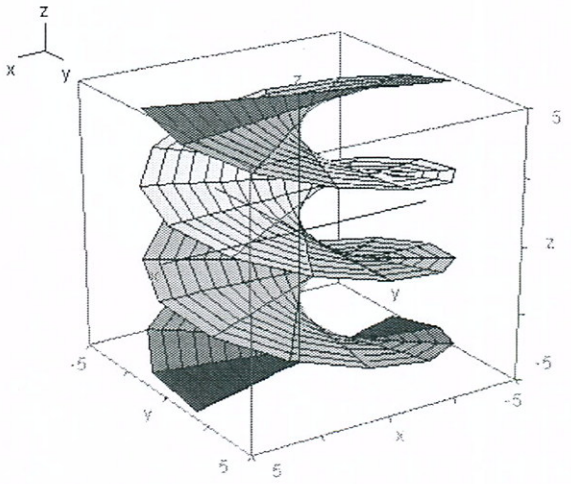
Következzenek a 3D paraméteres ábrák. Írjuk be a x = u·sin*t*, , y = u·cos*t*, z = *t* „csigalépcső" függvényt három elemből álló vektorként:

Írjuk be a függvényt: *[usint,ucost,t]*.

```
#7:  [u·SIN(t), u·COS(t), t]
```

Jelenítsük meg a görbét egy 3D-ábrázolás ablakban.

Nyissunk egy 3D-ábrázolás ablakot, helyezzük az ablakokat vízszintesen egymás mellé és ábrázoljuk a #7-t.



Egy ábra áttekintését, megértését nagyban segíti a forgatás.

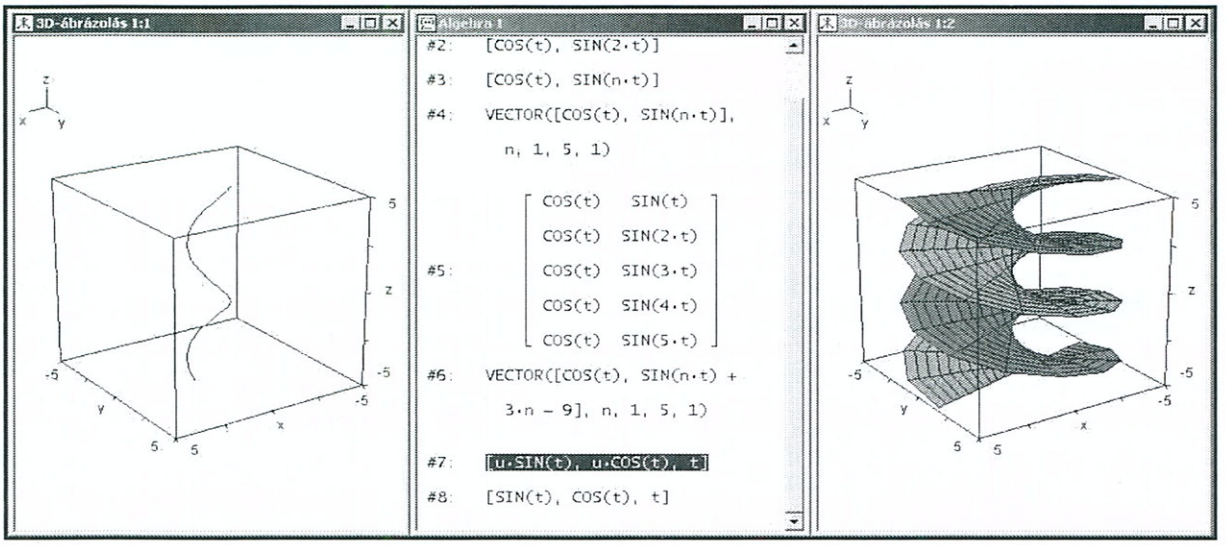
Forgassuk el az ábrát. Kapcsoljuk be az automatikus forgatást az **Ábra elforgatása** gombbal . Miközben az ábra forog vízszintesen, forgathatjuk le és föl a nyíl billentyűkkel (↑és ↓) vagy a nekik megfelelő gombokkal az eszközsorban.

A következőben nézzük meg a x = sin*t*, , y = cos*t*, z = *t* által meghatározott térgörbét.

Írjuk be a következőképpen: *[sint,cost,t]*

```
#8:  [SIN(t), COS(t), t]
```

Nyissunk még egy 3D-ábrázolás ablakot az **Ablak > Új 3D-ábrázolási ablak** utasítással, helyezzük egymás mellé mindhárom ablakot az **Ablak > Egymás mellett** utasítással és ábrázoljuk az új, #8 kifejezést.



Nézzük meg az ábrát és hasonlítsuk össze a csigalépcső ábrájával. Ez segít majd megérteni az egy vagy két paraméteres 3D ponthalmazok közötti különbséget.

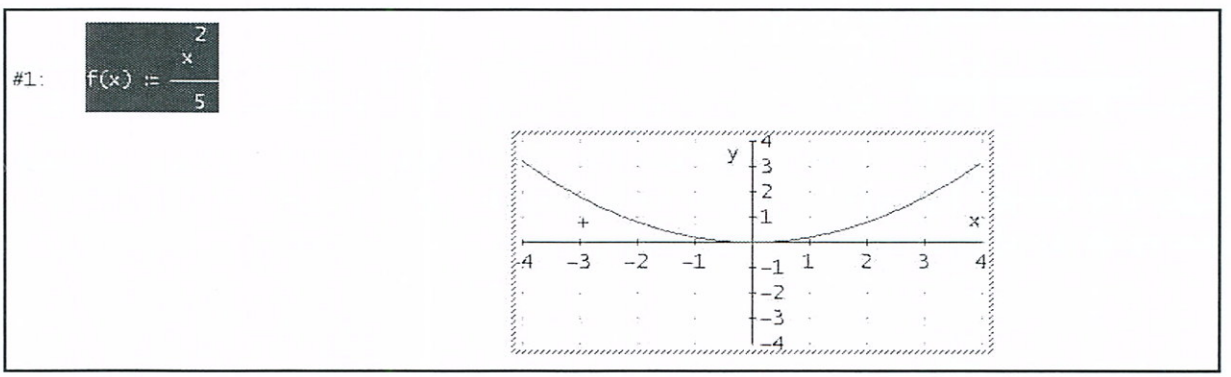
A térgörbe színének megváltoztatásához használjuk a **Szerkesztés > Ábrázolás** parancsot. Az **Ábrázolás színe** ablakban a **Vázlat** menüpontnál válasszuk az **Egyénit,** majd válasszuk ki a görbe és rács színét.

Zárjuk az algebra ablakot mentés nélkül.

Ezzel bezártuk a két ábrázolás ablakot is. Az ábrázolás ablakok „nem léteznek önmagukban". Mindegyik ábrázolás ablak egy algebra ablakhoz kötődik, mint ahogyan azt az ábrázolás ablak címsorában olvasható nevekből is láthatjuk. (Emlékezzünk: **3D-ábrázolás 1:2** az első, vagyis az **Algebra 1** ablak második 3D-ábrázolás ablaka.)

A paraméteres ábrák hasznosak lehetnek az x vagy az y tengely körül forgatott függvények megjelenítésére is. Forgassuk az $f(x)=\frac{1}{5}x^2$ függvényt mindkét tengely körül. Kezdjük a függvény beírásával, majd ábrázoljuk az $f(x)$-et egy 2D-ábrázolás ablakban.

Nyissunk egy új algebra ablakot teljes mérettel. Írjuk be: $f(x) := x\text{^}2/5$. Nyissuk meg a 2D-ábrázolási ablakot, ahol ábrázoljuk a $z = f(x)$ függvényt. Ágyazzuk be az ábrát, majd zárjuk be a 2D-ábrázolási ablakot.

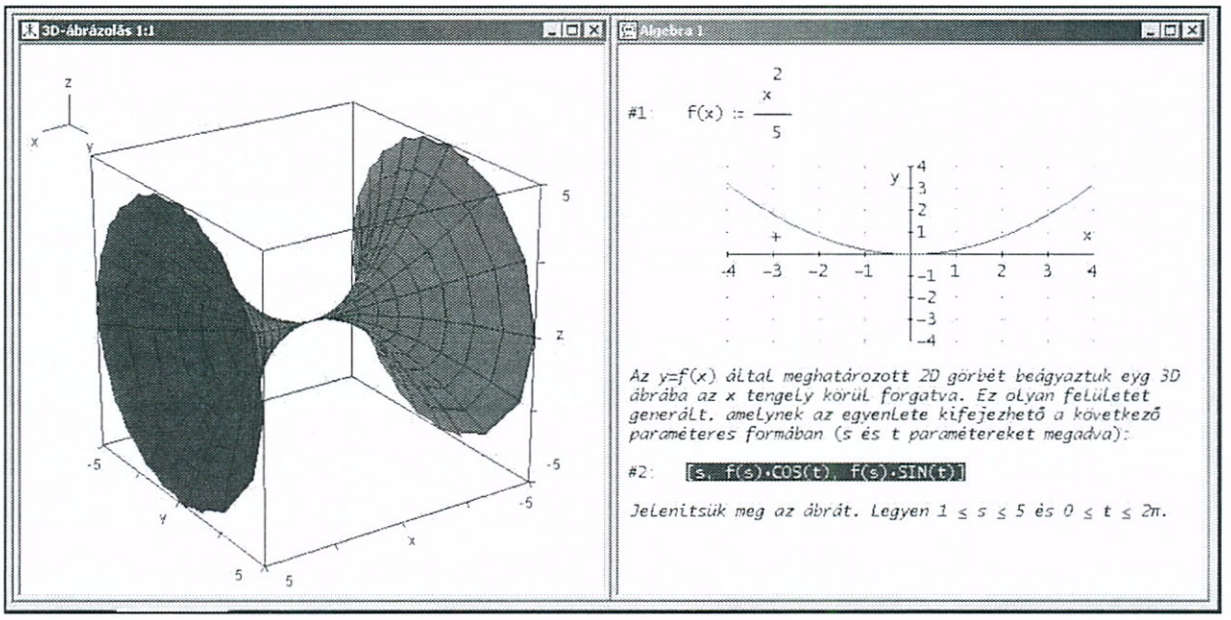


A beágyazott ábra után helyezzük be a következő magyarázó szöveget (először rákattintva ki kell jelölnünk a beágyazott ábrát): *„Az y = f(x) által meghatározott 2D görbét beágyaztuk egy 3D ábrába az x tengely körül forgatva. Ez olyan felületet generált, amelynek az egyenlete kifejezhető a következő paraméteres formában (s és t paramétereket megadva):"*

Írjuk be a három elemből álló vektort: $[s, f(s)\cos t, f(s)\sin t]$

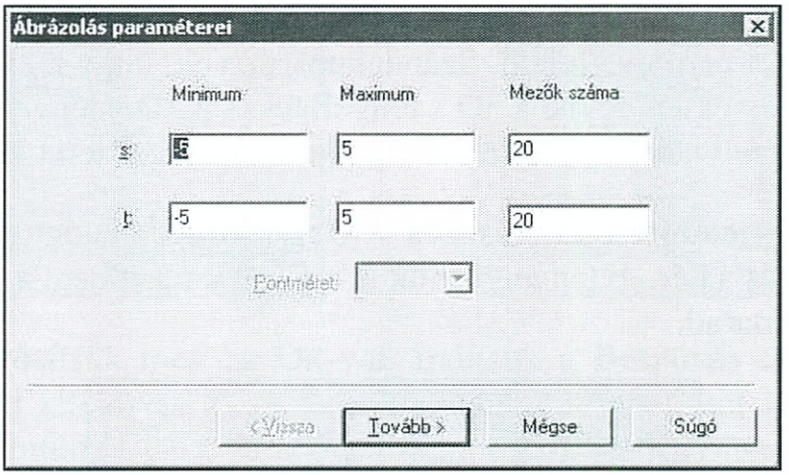
Illesszünk be még egy szöveges objektumot. Miután bevittünk egy kifejezést a beviteli sorból, könnyen illeszthetünk be utána szöveget az ESC, majd az **F5** billentyű leütésével. (Az ESC az algebra ablakot aktívvá teszi, az **F5** pedig a szövegobjektum bevitelének a gyorsbillentyűje.) Írjuk be a következő szöveget: *„Jelenítsük meg az ábrát. Legyen* $1 \le s \le 5$ *és* $0 \le t \le 2\pi$ *."*

Nyissunk egy 3D-ábrázolás ablakot, helyezzük el az ablakokat egymás mellett és ábrázoljuk a #2-t.

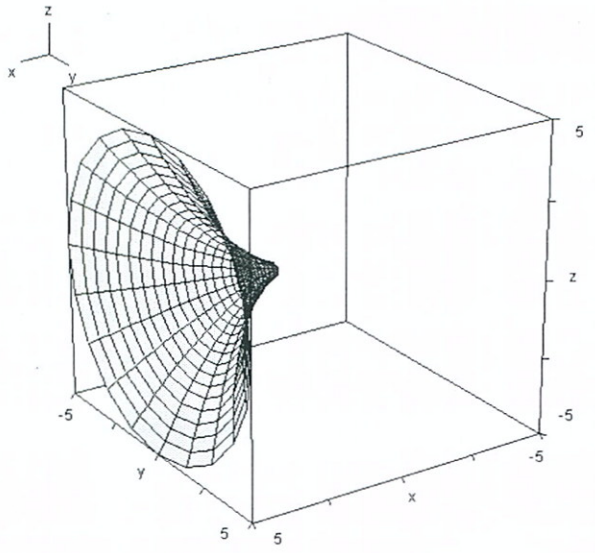


Ha az ábrázolás gombot használjuk, sem az *s* és *t* ábrázolási paramétereket, sem az ábrázolás stílusát nem tudjuk befolyásolni. Hogy megadhassuk a kívánt paraméter tartományt, használjuk inkább a **Beszúrás > Ábrázolás** utasítást.

Töröljük az ábrát és jelenítsük meg a #2-t újra, most a **Beszúrás > Ábrázolás** paranccsal.

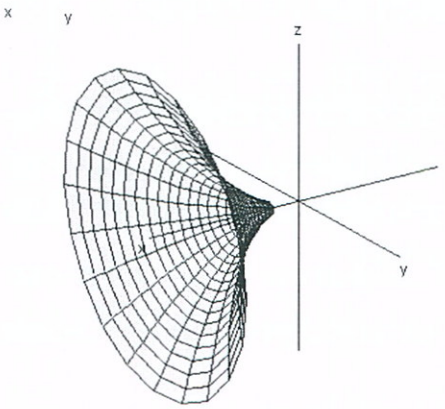


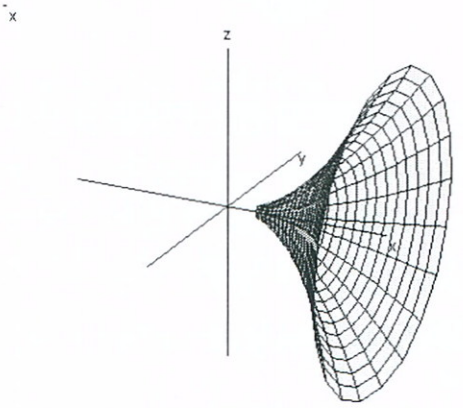
Az **s** sorban állítsuk a **Minimum**ot 1-re, a **Maximum**ot 5-re, a **t** sorban a **Minimum**ot 0-ra és a **Maximum**ot 2pi-re. Kattintsunk a TOVÁBB, majd pedig a BEFEJEZÉS gombra.



Mivel itt az x tengely körüli forgatás a lényeg, a doboz megjelenítés helyett állítsuk be a tengelyeket.

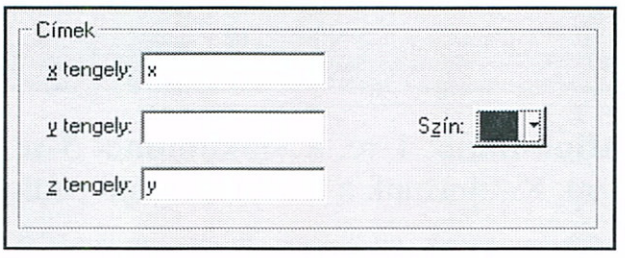
Az ábra mellett duplán kattintva nyissuk meg a **Megjelenítési beállítások** párbeszédablakot. Kapcsoljuk ki a **Doboz**t és kapcsoljuk be a **Tengelyek**et, majd forgassuk meg az ábrát, hogy jobban megfigyelhessük.



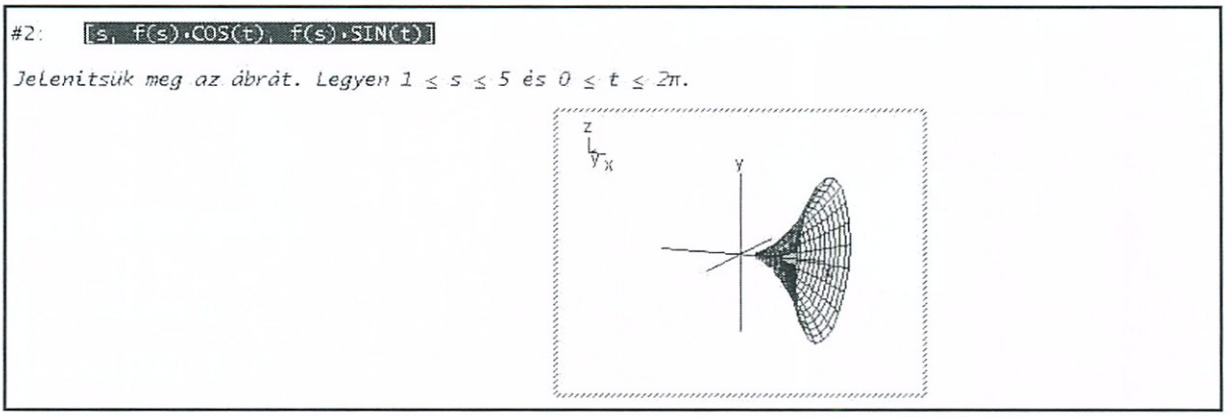


A tengelyek elnevezése nem megfelelő. Szándékunk az volt, hogy a 2D ábrát úgy ágyazzuk be, hogy a 2D x tengely essen egybe a 3D x tengellyel és a 2D y tengely essen egybe a 3D z tengellyel. A 3D y tengelynek a vízszintes $x - y$ síkra merőleges teret kellene biztosítania.

Nyissuk meg a **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés** dialógusablakot. Lapozzunk a **Tengelyek** oldalra, és a három tengelyt írjuk át a **Címek** mezőben: **x** marad x, **z**-t átírjuk y-ra és az **y** névtelen marad.



Forgassuk az ábrát úgy, hogy megfeleljen a dokumentumunk számára. Ágyazzuk be a **Fájl > Beágyazás** utasítással majd töröljük ki a 3D-ábrázolás ablakból.



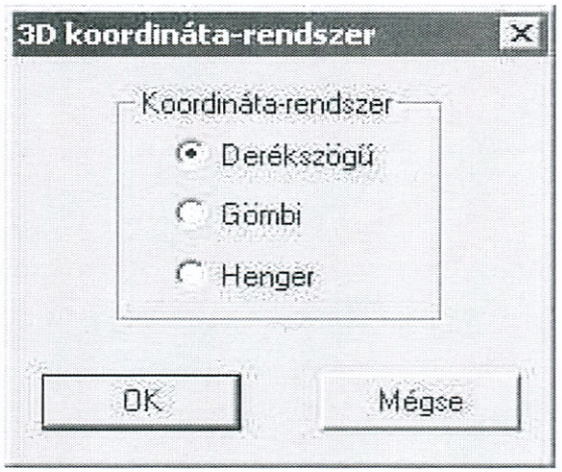
Következzék az *y* tengely körüli forgatás.

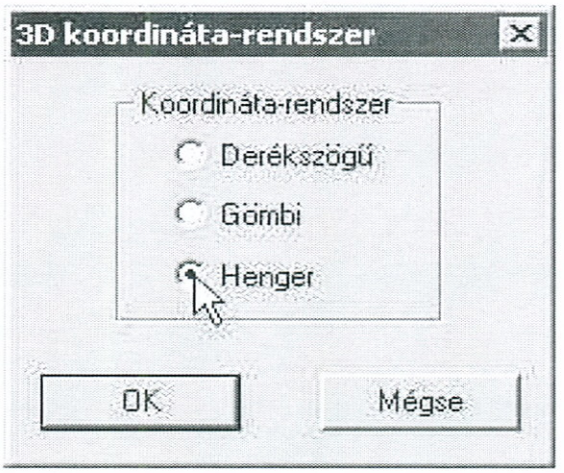
Illesszünk be egy szöveges objektumot a beágyazott ábra után (először jelöljük ki az ábrát): *„Az y = f(x) által meghatározott 2D görbét be fogjuk ágyazni egy 3D ábrába az y tengely körül forgatva. Ez olyan felületet generál, amelynek az egyenlete hengerkoordinátákban kifejezhető a következő paraméteres formában (s és t paramétereket megadva):"*

Vigyük be a három elemből álló vektort: $[s, t, f(s)]$

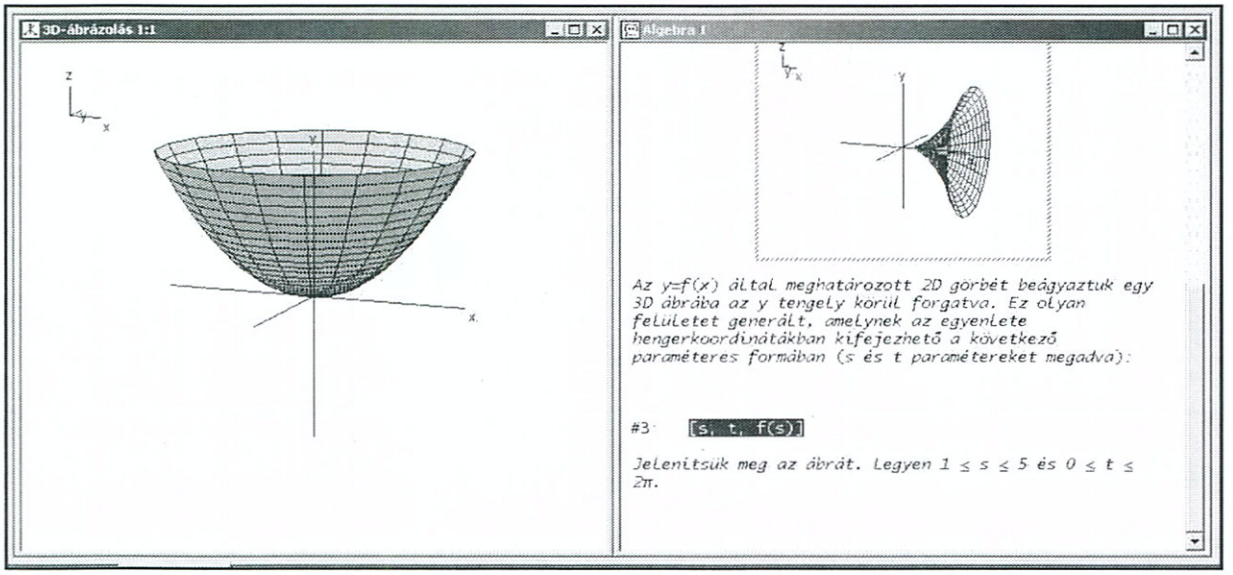
Illesszünk be egy szöveges megjegyzést. (Használjuk az ESC és **F5** gyorsbillentyű-kombinációt.) *„Jelenítsük meg az ábrát. Legyen* $1 \le s \le 5$ *és* $0 \le t \le 2\pi$ *."*

Változtassuk meg a koordinátarendszert a **Beállítások > Koordináta-rendszer** utasítással. Indítsuk az utasítást (bal oldali kép) és válasszuk a hengerkoordinátákat a **Henger** gombra kattintva.





Választásunkat erősítsük meg az OK-val. Indítsuk a **Beszúrás > Ábrázolás** utasítást miután kijelöltük a #3 kifejezést. Az **s** sorban állítsuk a minimumot 1-re, a maximumot 5-re, a **t** sorban a minimumot 0-ra és a maximumot 2pi-re. Kattintsunk a TOVÁBB, majd pedig a BEFEJEZÉS gombra.



Ágyazzuk be az ábránkat. Zárjuk be a **DERIVE**-ot, mentsük a munkalapunkat **10. fejezet** néven.

Amikor elmentünk egy munkalapot, minden algebra ablakbeli kifejezés, minden felhasználó által definiált függvény és változó mentésre kerül. Ezért ha megnyitunk egy **DERIVE** (.dfw) állományt, akkor annak mentett beviteli, kimeneti és egyszerűsítési beállításai is érvénybe lépnek. Ha új **DERIVE** munkalapot, vagy új algebra ablakot nyitunk meg, az mindig gyári beállításokkal fog indulni, függetlenül egy másik operációs rendszertől, vagy egy korábbi **DERIVE** munkalap beállításaitól.

Összefoglalás

2 D- ábrázolás ablak

Beszúrás > Ábrázolás ..... kijelölt kifejezés ábrázolása a grafikus ablakban

: Ábrázolási mód ..... ábrázolási mód beállítása

: Pontok ..... pontok megjelenítésének beállítása

: Paraméterek beállítása minden ábrán ..... paraméterek beállítása minden ábrán

3 D- ábrázolás ablak

Beállítások > Koordináta-rendszer ..... grafikus ablak koordináta-rendszerének beállítása

dupla kattintás az ábrán kívül ..... **Megjelenítési beállítások** párbeszédablak

Beállítások > Koordináta-rendszer .....

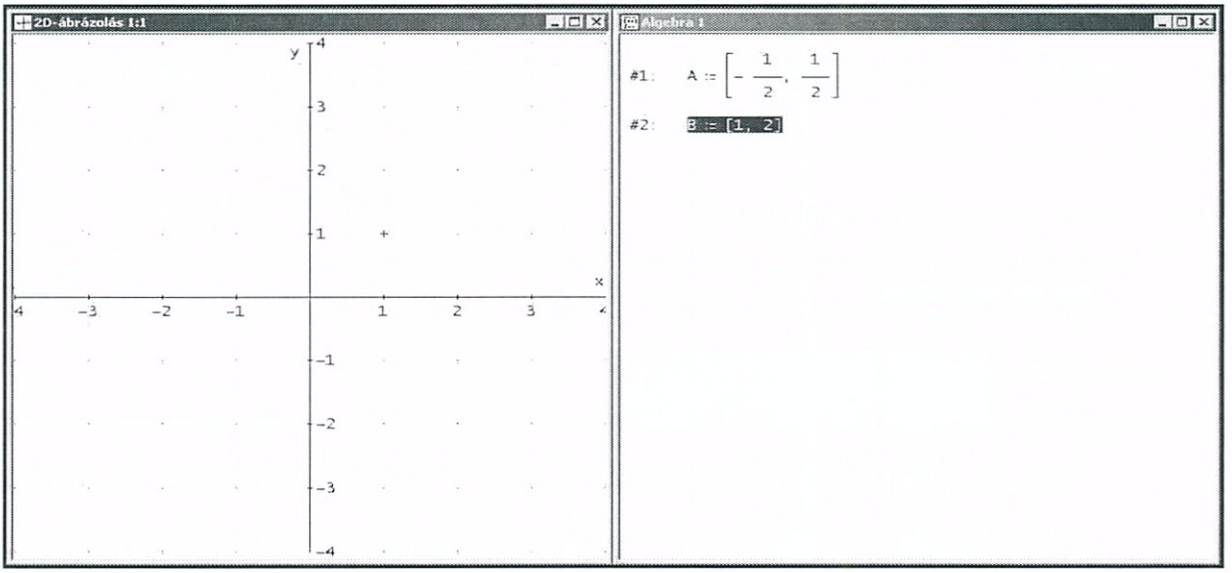
..... koordináta-rendszer beállításai (**Derékszögű / Gömbi / Henger**)

11. fejezet

Egy analitikus geometria modul

A **DERIVE**-ot felhasználhatjuk geometriai eszközként. A **DERIVE** és a hagyományos geometriai programok közt az a különbség, hogy a **DERIVE** legtöbb műveletének az algebra ablakból kell kiindulnia és az ábrázolás ablakokat csak az algebrai objektumok és műveletek megjelenítésére használjuk. Ennek a megközelítésnek a koordináta geometria az alapja, amely összekapcsolja az algebrát a klasszikus geometriával. Minden geometriai objektumnak kell hogy legyen megfelelő algebrai objektuma (kifejezés, függvény) az algebra ablakban. Ebben a fejezetben készítünk egy rövid analitikus geometriai programot.

Indítsuk a **DERIVE**-ot alapbeállításban. Írjuk be és ábrázoljuk a következő pontokat: *A[-1/2,1/2]* és *B[1,2]*



Határozzuk meg a két pontot összekötő szakasz felező merőlegesét a perpendikuláris vektorforma alkalmazásával. Mielőtt megoldanánk a **DERIVE**-val ezt a problémát, ismételjük át ennek a megközelítésnek a matematikai hátterét:

Legyen $\vec{v}$ az [x,y] általános koordinátájú vektor, $\vec{p}$ az origót a *P* ponttal összekötő vektor és $\vec{d}$ egy irányvektor. Így a *P*-n keresztül $\vec{d}$ irányban húzott egyenest a $g: \vec{v} = \vec{p} + \lambda\vec{d}$ paraméteres formában írhatjuk le, ahol λ a skaláris paraméter. Legyen $\vec{n}$ egy $\vec{d}$-re merőleges vektor. $\vec{v}$ és $\vec{n}$ szorzatából az $\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot (\vec{p} + \lambda \cdot \vec{d}) = \vec{n} \cdot \vec{p} + \lambda(\vec{n} \cdot \vec{d})$-t kapjuk. Az $\vec{n} \cdot \vec{d}$ szorzat nullát ad, mert $\vec{n}$ és $\vec{d}$ merőlegesek. Ebből következik, hogy $\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{p}$-vel. Ezt nevezzük egy egyenes perpendikuláris vektor formájának.

Hogy ebben a formában leírjuk az „*A* és *B* felező merőlegese" elnevezésű egyenest, fel kell az egyenesen vennünk egy pontot és egy merőleges vektort. A legegyszerűbb megoldást *A* és *B* felezőpontja kínálja, nevezzük *M*-nek.

Írjuk be, egyszerűsítsük, majd ábrázoljuk: *M:=(a+b)/2*

#3: $M := \frac{A + B}{2}$

#4: $M := \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$

Az $\vec{m}$ vektort használva, amely az M pontot az origóval összekötő vektor, a g felező merőleges egyenlete normál formában $\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{m}$ lesz, és a következőképpen írható be:

Írjuk be: $g := n.[x, y] = n.m$

#5: g := n • [x, y] = n • M

Az A és B felező merőlegesére merőleges vektor az A és B-t összekötő vektor lesz: $\vec{n} = \vec{b} - \vec{a}$.

Írjuk be: $n := b - a$

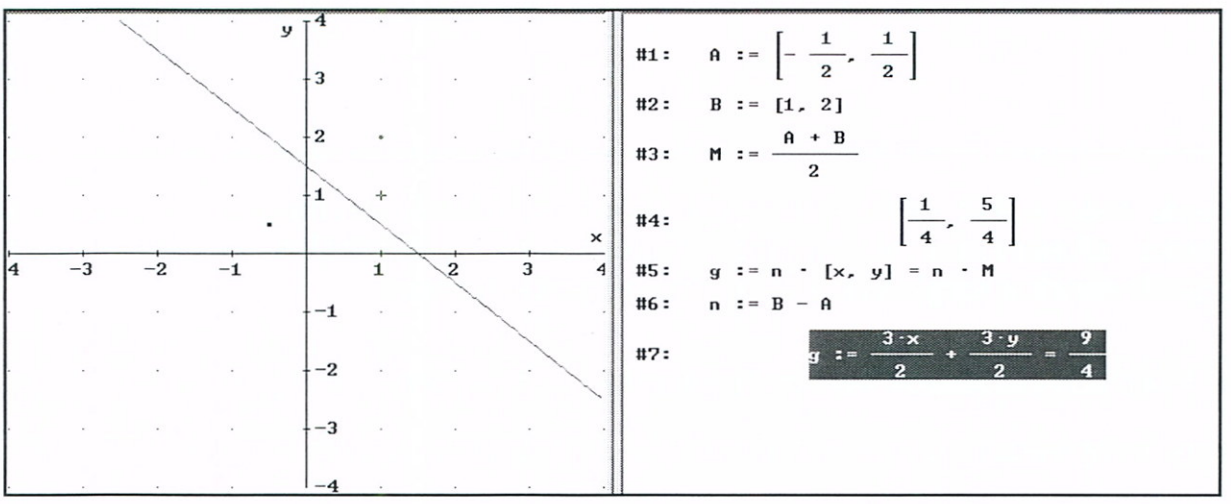
#6: n := B − A

Jelenítsük meg a g egyenes egyenletét.

Jelöljük ki a #5 definíció jobb oldalát ...

#5: g := n • [x, y] = n • M

...egyszerűsítsük, majd ábrázoljuk.



Így most megkaptuk a felező merőleges analitikus és geometriai megfelelőjét is.

Mikor egy összetettebb problémát oldunk meg, a felező merőleges megkeresése csak részproblémát jelenthet. Ahelyett tehát, hogy mindig megismételnénk a fenti lépéseket, kényelmes megoldást jelent, ha ezt egy PERP_BISECTOR függvény formájában elmentjük. Ezt a függvényt aztán könnyen alkalmazhatjuk. Először definiáljuk az alábbi két segédfüggvényt, amelyek felhasználhatók majd máshol:

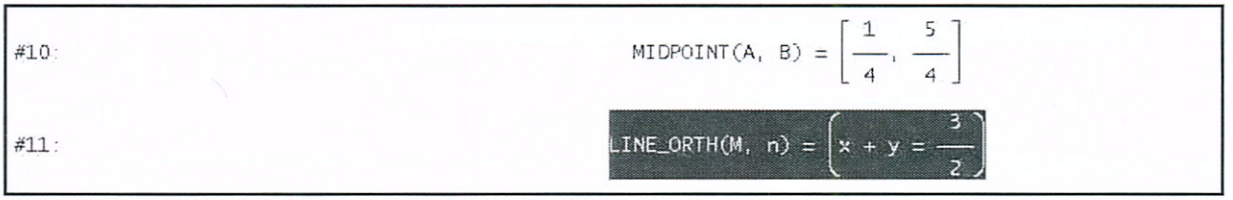
- MIDPOINT meghatározza két pont szakasz felezőpontját
- LINE-ORTH meghatározza egy egyenes egyenletét, amely egy pont és egy merőleges vektor által van megadva (lásd a fenti magyarázatot)

Definiáljuk a MIDPOINT függvényt: *MIDPOINT(P,Q):=(P+Q)/2*. Definiáljuk a LINE_ORTH függvényt: *LINE_ORTH(P,n):=n.[x,y]=n.P*

A **DERIVE** a beépített függvények nevénél a nagybetűket használja. Ha ezt a hagyományt követni akarjuk, használjuk mi is a nagybetűket a függvények definiálásánál. Ha az alapbeállítást használjuk, amikor a **DERIVE** nem tesz különbséget a kis- és nagybetűk között, ezen függvények behívásánál akármelyiket használhatjuk. (Ebben a könyvben a függvények behívásakor a kisbetűket használjuk.) A megjelenítéskor a definíciókor használt változatot láthatjuk. A beépített függvények neve feltétlenül nagybetűkkel jelenik meg, mint például a **SIN**, **COS** és **LN**. Ha meg kívánjuk különböztetni a beépített függvényeket a magunk által definiáltaktól, használjunk más elnevezési formát, például csupa kisbetűt, vagy csak az első betű legyen nagybetű. Ez a könyv számos ilyen konvencionális megoldást használ. Válasszuk az igényeinknek megfelelőt.

Próbáljuk ki a függvényeinket a munkalapunkon felvett két ponttal.

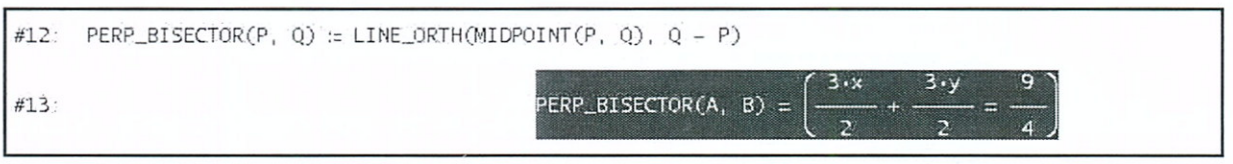
Alkalmazzuk a MIDPOINT függvényt *A* és *B*-re : *midpoint(a,b)=*. Alkalmazzuk a LINE_ORTH függvényt *M*-re és $\vec{n}$ -re : *line_orth(m,n)=*



Kombináljuk az előző két függvényt egy új, PERP_BISECTOR fügvénnyé.

Definiáljuk a PERP_BISECTOR függvényt, beírva a következőt: *PERP_BISECTOR(P,Q):=line_orth(midpoint(P,Q),Q-P)*

Próbáljuk ki az új függvényt *A* és *B*-re : *perp_bisector(a,b)=*



A PERP_BISECTOR függvényt használva egyetlen lépésben megoldhatjuk azt, ami az imént még több lépést igényelt. Az algebrai eredmény azonban eltérhet egy -1-es tényezővel, attól függően, hogy a két pont közül melyiket vesszük első argumentumként.

A későbbi felhasználás céljából mentsük a definíciókat (függvényeket). Kezdjük azzal, hogy törlünk minden fölösleges kifejezést

Töröljünk minden kifejezést a munkalapról, kivéve a MIDPOINT, LINE_ORTH és PERP_BISECTOR definíciókat.

```
#1:   MIDPOINT(P, Q) := (P + Q)/2

#2:   LINE_ORTH(P, n) := n • [x, y] = n • P

#3:   PERP_BISECTOR(P, Q) := LINE_ORTH(MIDPOINT(P, Q), Q - P)
```

Fűzzünk egy rövid megjegyzést a tartalomra és a szerzőre vonatkozóan. Mivel a kifejezéseket **Mth** állományként kell mentenünk, és nem dokumentumként, nem illeszthetünk be szöveges objektumot. Helyette a szöveget a beviteli sorból írjuk be idézőjelbe tett karaktersorként. Mikor egy **Mth** állományt betöltünk a **Fájl > Betöltés > Segéd fájl** utasítással, a kifejezések érvényesen működnek (mint például a hozzárendelés és a függvény definíciók) az algebra ablakban, de maga a kifejezés nem jelenik meg.

Írjuk be a szöveges karaktersort: „*A PERP_BISECTOR két pont felező merőlegesét számítja ki*". Írjunk be még egy megjegyzést: „*A programot készítette: .....2004..... hónap ..... én.*"

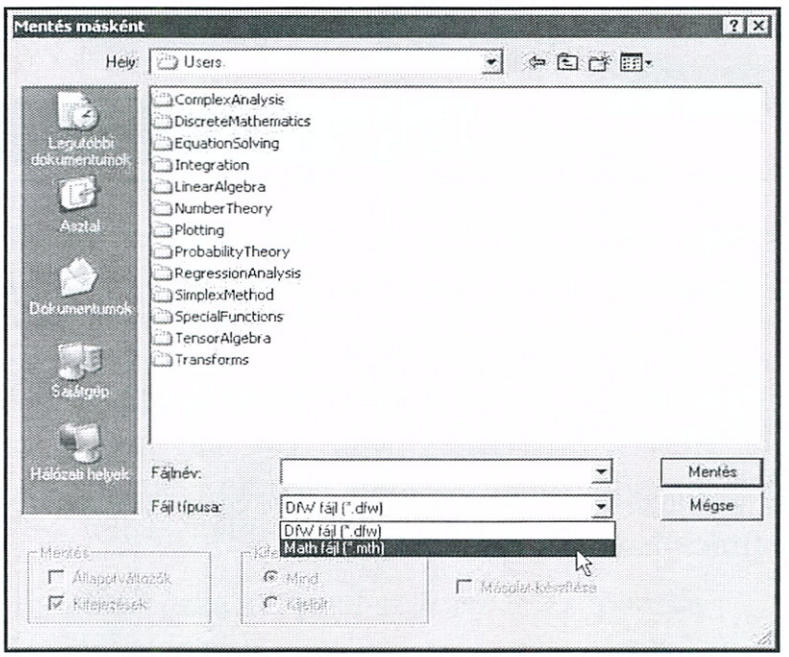
```
#4:   A PERP_BISECTOR két pont felező merőlegesét számítja ki

#5:   A programot készítette: .....2004..... hónap ..... én.
```

Zárjuk az ábrázolás ablakot és nyissuk az algebra ablakot teljes méretre. Mozgassuk a szöveget a lap tetejére.

```
#1:   A PERP_BISECTOR két pont felező merőlegesét számítja ki

#2:   A programot készítette: .....2004..... hónap ..... én.

#3:   MIDPOINT(P, Q) := (P + Q)/2

#4:   LINE_ORTH(P, n) := n • [x, y] = n • P

#5:   PERP_BISECTOR(P, Q) := LINE_ORTH(MIDPOINT(P, Q), Q - P)
```

Mentsük el ezt a programot felező merőleges számításához egy fájlban **geometry** névvel.

Mentsük a kifejezéseket: Indítsuk a **Fájl > Mentés másként** utasítást, a **Fájltípus** mezőben a **DfW** fájltípus helyett válasszuk a **Mth fájl** menüpontot, ...



... a **Fájlnév** mezőbe írjuk be a **geometry** nevet, majd zárjuk a párbeszédablakot a MENTÉS-sel.

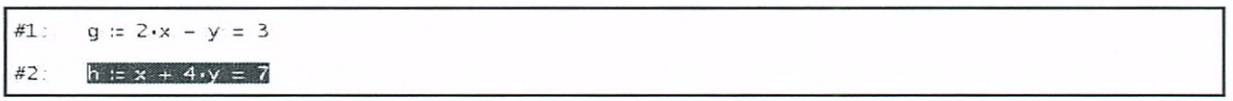
Az állapotsorban üzenetet kapunk a „sikeres mentés"-ről:

Azt is megfigyelhetjük, hogy az állománynév most már kapcsolódik az ablaktípushoz és címhez a címsorban.

Az alapértelmezett fájltípus a **DfW fájl**, melynek kiterjesztése **.dfw**. A **Mth fájl**-ok mind a **.mth** kiterjesztést kapják.

Definiáljunk függvényt **INTERSECT** néven, amellyel két egyenes metszéspontját tudjuk kiszámítani olyan formában, amely ábrázolható és más számításokhoz felhasználható. Írjunk be két egyenletet, *g*-t és *h*-t egy új algebra ablakba.

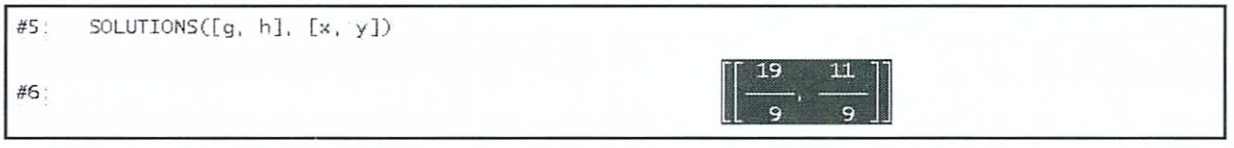
Zárjuk be az aktuális algebra ablakot és nyissunk egy újat. Rendeljük a 2x–y=3 egyenletet a *g* változóhoz, és az x+4y=7 egyenletet a *h*-hoz.



Számítsuk ki a *g* és *h* metszéspontját a *g* és *h* egyenleteket tartalmazó egyenletrendszer megoldásával.

A #4-es kifejezés a metszéspontot oly módon képviseli, amely se nem ábrázolható, se nem használható számításokban, mint például vektorok összeadásában. Nekünk olyan alakban kell ez a metszéspont, ahogyan eddig is beírtunk pontokat, azaz egy lista formájában, melynek két, a két koordinátát képviselő tagja van. Vagyis erre a pontra nekünk [19/9,11/9] formában van szükségünk.

Változtassuk meg a függvény nevét **SOLVE**-ról **SOLUTIONS**-ra (használhatunk kis- és nagybetűket, vagy vegyesen mindkettőt). Vigyük be és egyszerűsítsük.



Ez már sokkal közelebb van ahhoz, amire szükségünk van. Látható, hogy a **SOLUTIONS** függvény egy listát generál. Egyetlen megoldással viszont olyan listát kapunk, amely csak egy pontot határoz meg. Valójában ez egy egy sorból és két oszlopból álló mátrix. A **DERIVE** az egysoros mátrixokat két különböző, de egymást kiegészítő egyedi módon kezeli: (1) Vektorok vektoraként jeleníti meg dupla szögletes zárójelek között és nem mint mátrixot (Ez segít megkülönböztetni a vektorokat és az egysoros mátrixokat.) (2) Nem lehet a pontosvesszőt használni a bevitelkor, mert nincsenek sorok, amelyeket el kellene választani.

Inkább a sorra és nem az egész mátrixra van szükségünk, tehát használjuk a **SUB** (vagy a **ROW**) operátort, hogy megkapjuk a lista első (és egyetlen) elemét.

Emeljük ki a pontot a #6 kifejezésből. Írjuk be: *#6 sub 1=*

#7: $\left[\left[\frac{19}{9}, \frac{11}{9}\right]\right]_1 = \left[\frac{19}{9}, \frac{11}{9}\right]$

Ezt a lépést, amelyben a **SOLUTIONS** függvény behívásának eredményét igényeinknek megfelelően alakítjuk, kódolhatjuk egy megfelelő függvényben.

Definiáljuk az **INTERSECT** függvényt, beírva a következőt: *INTERSECT(r,s):=solutions([r,s],[x,y]) sub 1*

Próbáljuk ki a függvényt *g* -re és *h*-ra.

```
#8:  INTERSECT(r, s) := (SOLUTIONS([r, s], [x, y]))
                                                  1
```

#9: $\text{INTERSECT}(g, h) = \left[\frac{19}{9}, \frac{11}{9}\right]$

A **geometry** fájlt egészítsük ki az **INTERSECT** függvény definíciójával és a hozzáfűzött magyarázattal.

Az **INTERSECT** függvény definícióját másoljuk a vágólapra: Jelöljük ki a #8 kifejezést és másoljuk a vágólapra (például a **Másolás** gombbal)

```
#8:  INTERSECT(r, s) := (SOLUTIONS([r, s], [x, y]))
                                                  1
```

Nyissuk meg a **geometry** nevű állományt: Indítsuk a **Fájl > Megnyitás** utasítást (vagy használjuk a **Megnyitás** gombot). Adjuk meg az állomány nevét akár úgy, hogy a **geometry** állománynévre kattintunk duplán, vagy begépeljük a nevet a **Fájlnév** mezőbe és rákattintunk a MEGNYITÁS gombra.

```
#1:  A PERP_BISECTOR két pont felező merőlegesét számítja ki
#2:  A programot készítette: ..........2004.......... hónap ..... én.
#3:  MIDPOINT(P, Q) := (P + Q)/2
#4:  LINE_ORTH(P, n) := n • [x, y] = n • P
#5:  PERP_BISECTOR(P, Q) := LINE_ORTH(MIDPOINT(P, Q), Q - P)
```

Ha a vágólap tartalmát most másolnánk be, a kifejezés a jelenleg kijelölt #5 kifejezés után kerülne beillesztésre. Innen mozgathatnánk a munkalap végére. Megtehetjük viszont azt, hogy megszüntetjük #5 kijelölését úgy, hogy egyetlen kifejezés se legyen kijelölve az ablakban, és ekkor illesztjük be, hogy a lap végére kerüljön.

Szüntessük meg a #5 kifejezés kijelölését. Mozgassuk az egérkurzort közvetlenül a #5 kifejezés mellé jobbra, ...

```
#5:  PERP_BISECTOR(P, Q) := LINE_ORTH(MIDPOINT(P, Q), Q - P)
```

... nyomjuk le és tartsuk lenyomva a CTRL billentyűt, és kattintsunk a bal egérgombbal.

```
#5:   PERP_BISECTOR(P, Q) := LINE_ORTH(MIDPOINT(P, Q), Q - P)
```

Illesszük be az **INTERSECT** függvény definícióját a vágólapról.

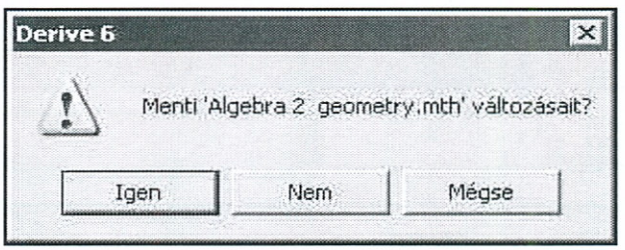
```
#6:   INTERSECT(r, s) := (SOLUTIONS([r, s], [x, y]))
                                                  1
```

Írjuk be a szöveges magyarázatot: *„Az INTERSECT két egyenes metszéspontját számítja ki az xy koordinátarendszerben."*

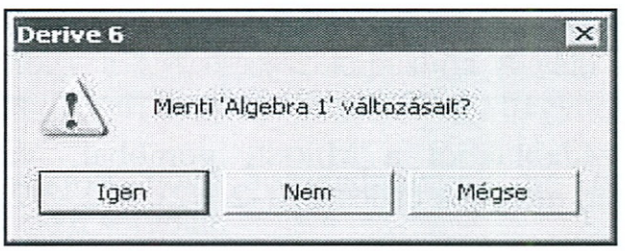
Helyezzük ezt a második sorba.

```
#1:   A PERP_BISECTOR két pont felező merőlegesét számitja ki
#2:   Az INTERSECT két egyenes metszéspontját számitja ki az xy koordinátarendszerben.
#3:   A programot készitette: ..... 2004 ..... hónap ..... én.
#4:   MIDPOINT(P, Q) := (P + Q)/2
#5:   LINE_ORTH(P, n) := n • [x, y] = n • P
#6:   PERP_BISECTOR(P, Q) := LINE_ORTH(MIDPOINT(P, Q), Q - P)
#7:   INTERSECT(r, s) := (SOLUTIONS([r, s], [x, y]))
                                                  1
```

Zárjuk az állományt a **Fájl>Bezárás** utasítással.



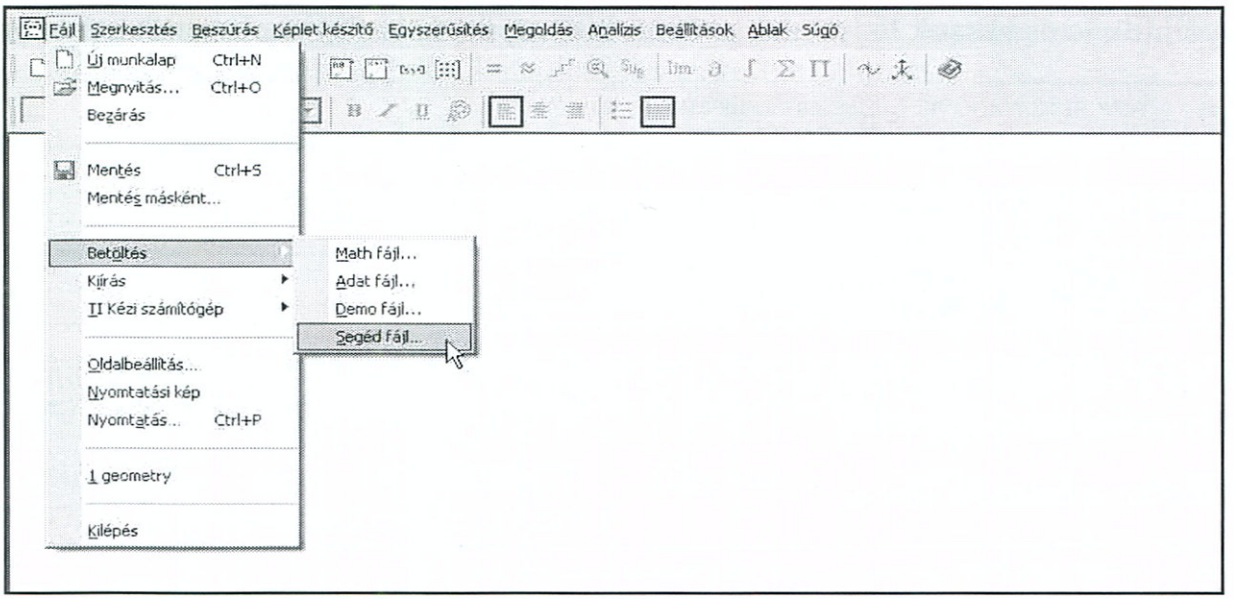
A frissítésre vonatkozó kérdésre válaszoljunk az IGEN gombbal, és utána zárjuk a névtelen **Algebra 1** ablakot a **Fájl > Bezárás** utasítással ...



... a frissítésre vonatkozó kérdésre válaszoljunk a NEM-mel.

A PERP_BISECTOR és az INTERSECT függvények kiválóan alkalmasak a háromszög köré írt kör egyenletének meghatározására.

Nyissunk egy új algebra ablakot. Töltsük be a függvényeket az **geometry.mth** állományból anélkül, hogy magukat a kifejezéseket megjelenítenénk az algebra ablakban: Használjuk a **Fájl > Betöltés > Segéd fájl** utasítást ...

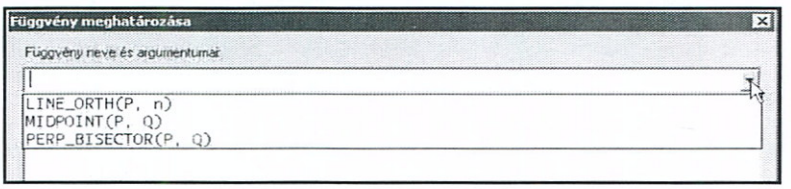


💻 ...és válasszuk ki a **geometry** állományt.

```
#1:   LOAD(C:\Program Files\TI Education\Derive 6\Users\geometry.mth)
```

A **Képlet készítő > Függvények megadása** utasítás behívásával a dialógusablakban megtekinthetjük a jelenleg rendelkezésre álló összes felhasználó által definiált függvényt és azok meghatározását.

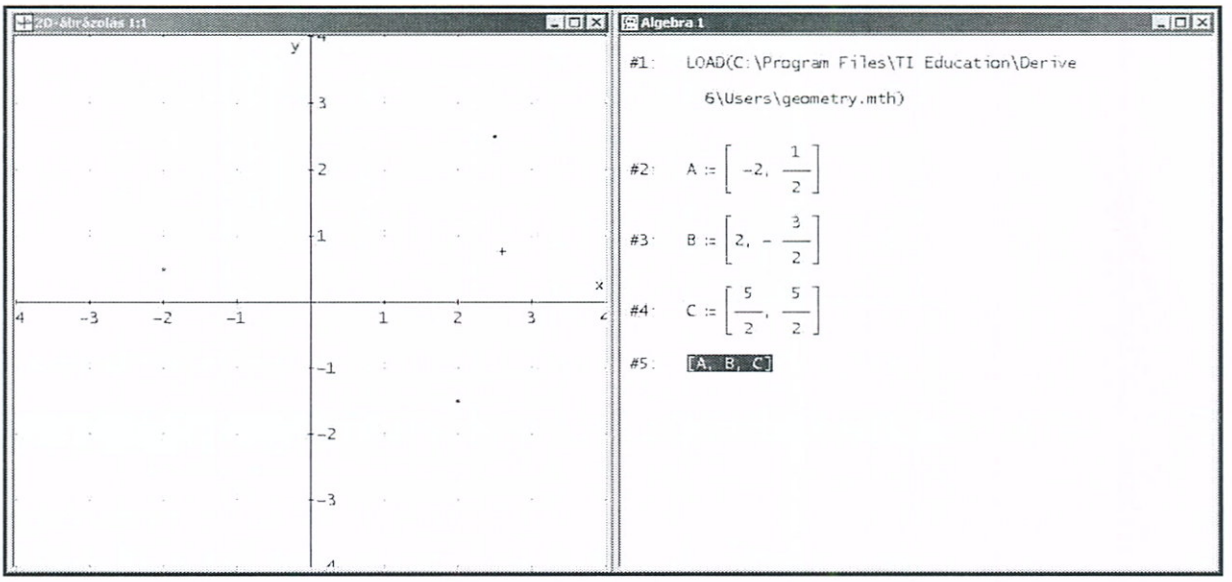
💻 Nézzük meg a PERP_BISECTOR definícióját: Indítsuk a **Képlet készítő > Függvények megadása** utasítást és nyissuk le a **Függvény neve és argumentumai** menüablakot.



💻 Válasszuk ki a LINE ORTH(P,n)-t a listában rákattintva.

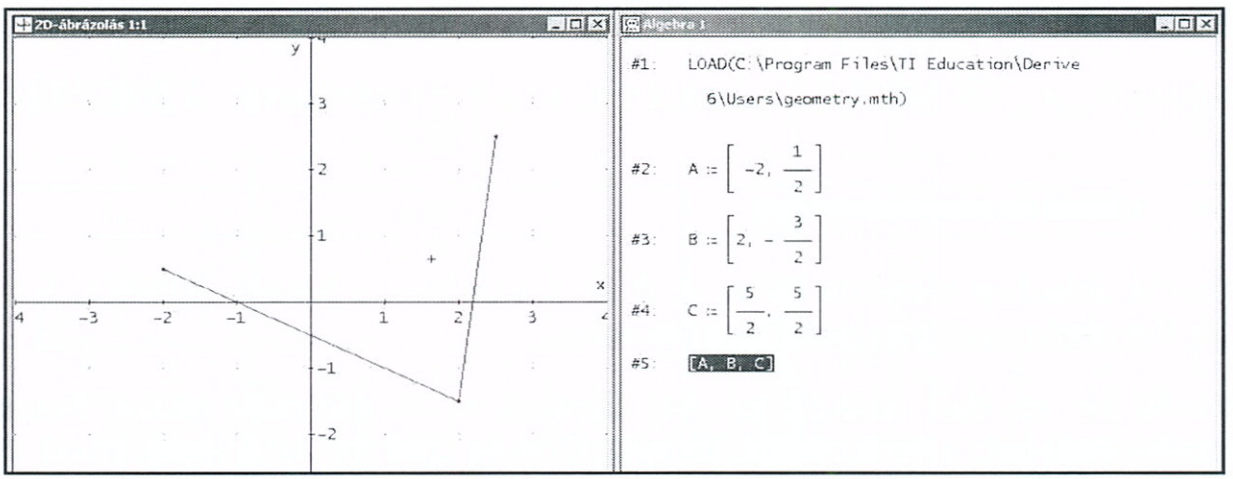
💻 Lépjünk ki a párbeszédablakból a MÉGSE gombbal, vagy az ESC billentyűvel. Rajzoljunk egy háromszöget, melynek csúcsai $A(-2,1/2)$, $B(2,-3/2)$ és $C(5/2, 5/2)$.

💻 Vigyük be a három pontot, majd foglaljuk össze egy objektummá az *[A,B,C]* beírásával. Nyissunk egy 2D-ábrázolás ablakot, helyezzük az ablakokat egymás mellé és ábrázoljuk a három tagból álló listát.



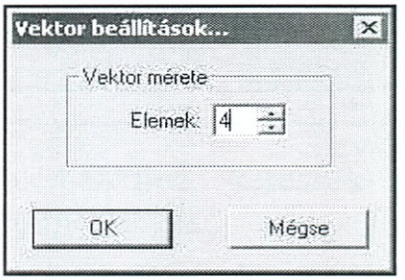
Ez három különálló pontot eredményez. A háromszög oldalait úgy ábrázolhatjuk, hogy a **DERIVE** segítségével összekötjük a szomszédos pontokat. Ezt a **Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Pontok** utasítással megnyitható párbeszédablakban állítható be.

A pontok összekötését kapcsoljuk be, kapcsoljuk ki a színek automatikus cseréjét, válasszunk egy ábrázolási színt és ábrázoljuk újra a #5 kifejezést.

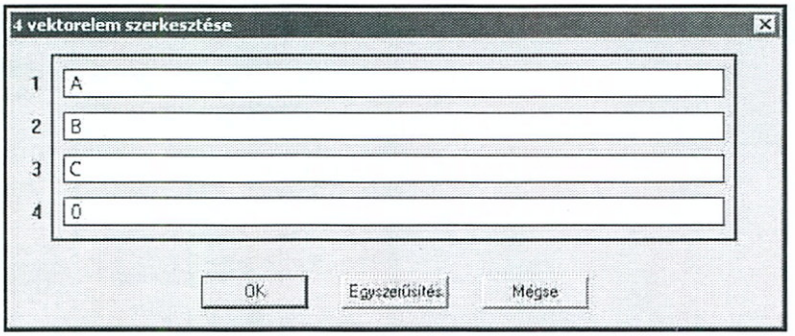


Amikor a pontok összekötése üzemmód be van kapcsolva, a szomszédos pontokat kapcsolja össze. Ahhoz, hogy a *C*-t is összekapcsolja *A*-val, szomszédos pontokká kell tennünk őket. Ezt azzal érhetjük el, hogy a vektorhoz egy negyedik elemet adunk.

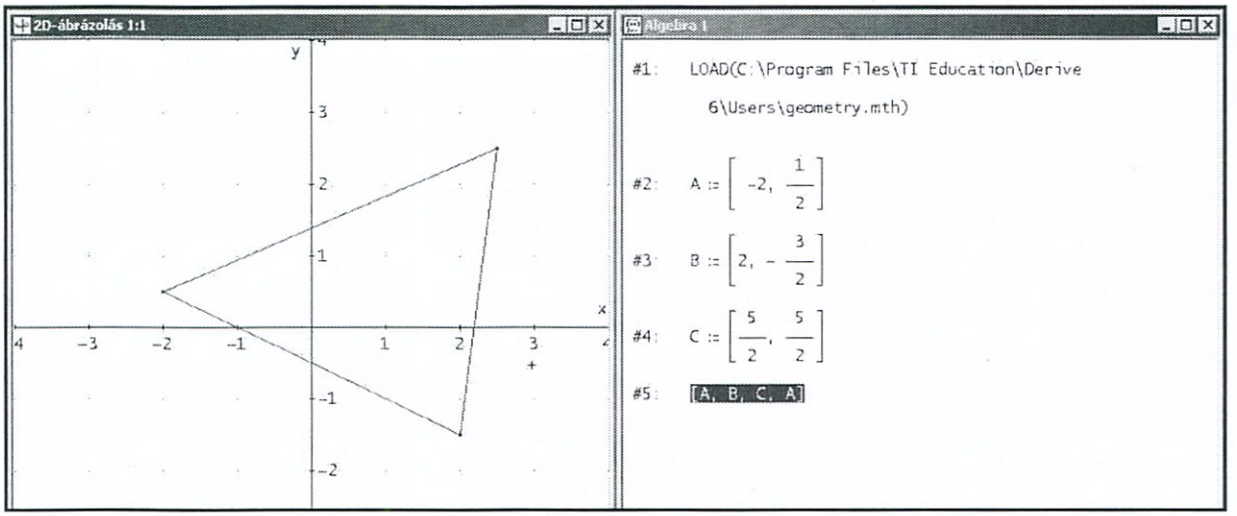
Szerkesszük át a #5 vektort, hogy hozzáadhassunk egy negyedik elemet. A vektor szerkesztéséhez kattintson elé a sorában.



Az elemek számát állítsuk 4-re.

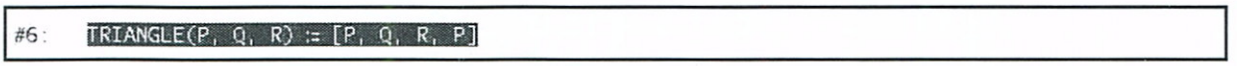


Írjuk be *A*-t a negyedik sorba, zárjuk a párbeszédablakot az OK-val és ábrázoljuk újra.



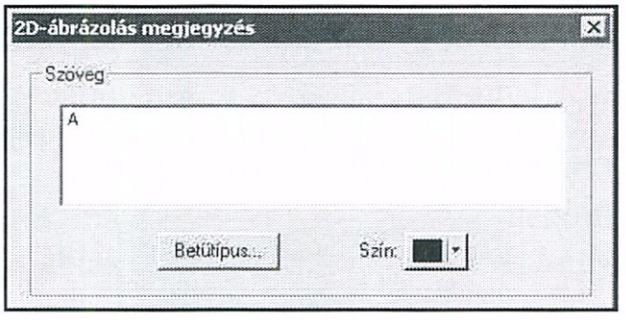
Általánosítsuk ezt az elegáns megoldást a TRIANGLE függvényben.

Definiáljuk a TRIANGLE függvényt a következőképpen: *TRIANGLE(P,Q,R) :=[P,Q,R,P]*

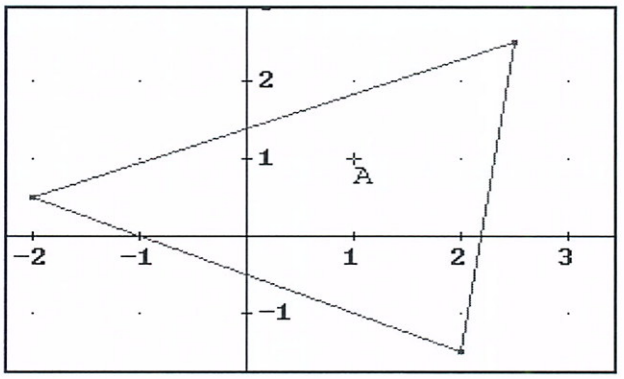


Az ábrázolás ablakban illesszük be az *A*, *B* és *C* címkéket a három csúcshoz. Ezt a 2D-ábrázolás **Beszúrás** menüpontjában tehetjük meg.

Illesszük be az első címkét, az *A*-t. Indítsuk a 2D-ábrázolás ablak **Beszúrás > Megjegyzés** utasítását, a betűméretet állítsuk 12-re és írjuk be az A betűt, majd üssük le kétszer a szóköz billentyűt. (Az üres betűhelyekkel könnyebb lesz az egérrel megfognunk a szövegmezőt.)

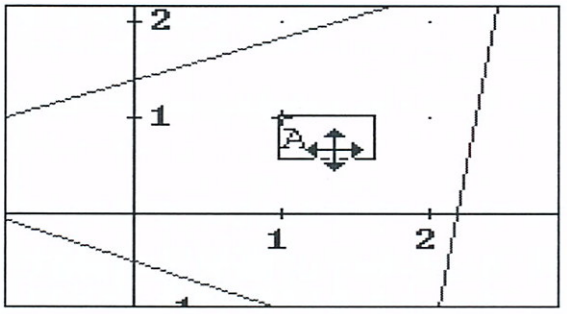


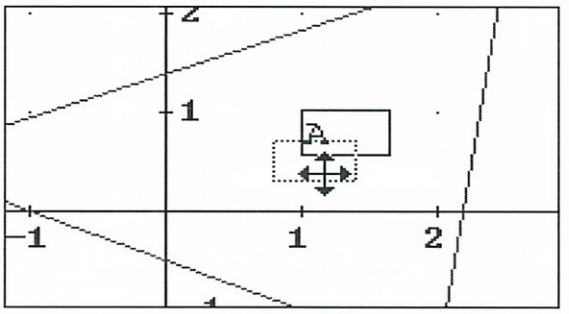
Zárjuk a dialógusablakot az OK-val.



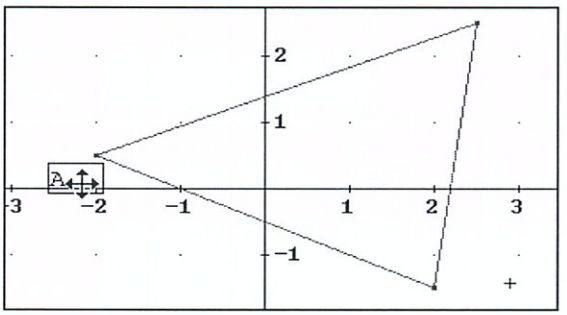
A címke a grafikai kereszt helyére kerül beillesztésre, de tudjuk mozgatni.

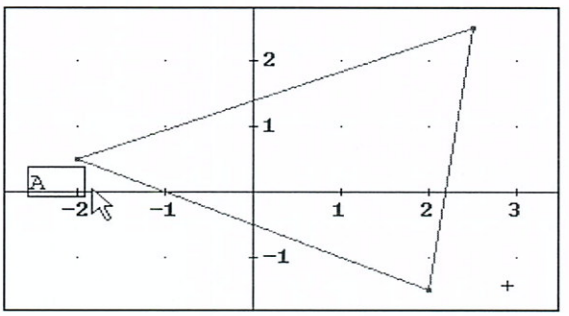
💻 Az egérkurzort mozgassuk a szövegmező fölé (a két szóköz az A betű után megkönnyíti ezt), jelöljük ki a bal egérgombbal rákattintva és tartsuk lenyomva az egérgombot (bal oldali kép), hogy mozgathassuk a címkét.



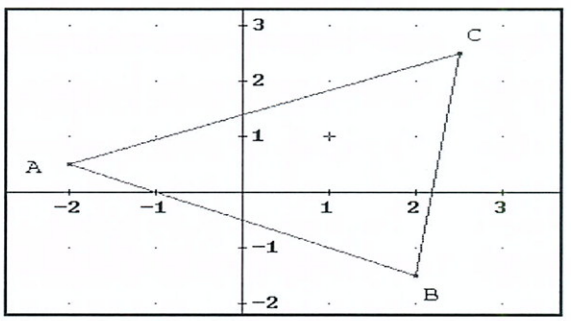


💻 Húzzuk a címkét a kívánt helyre (bal oldali kép), majd engedjük fel az egérgombot.





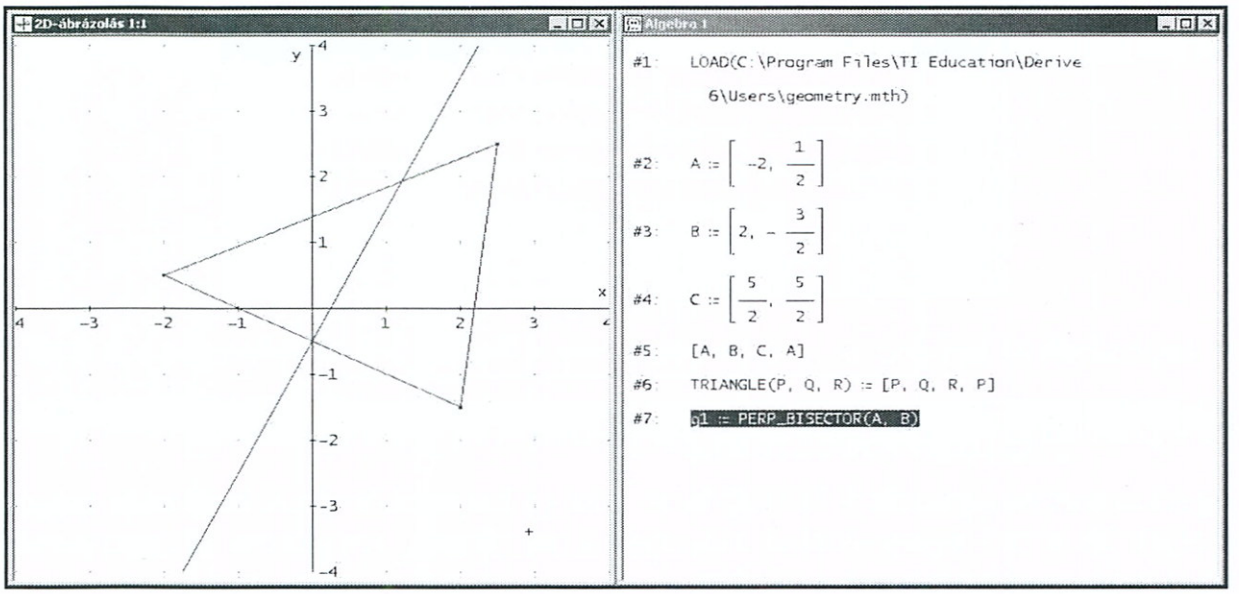
💻 Illesszük be a *B* és *C* címkéket is megfelelőképpen.



Térjünk vissza az eredeti problémánkhoz: keressük a háromszög köré írható kört. Számítsuk ki és ábrázoljuk a felező merőlegest.

💻 Számítsuk ki a felező merőlegest. Írjuk be: *g1 :=perp_bisector(a,b)*

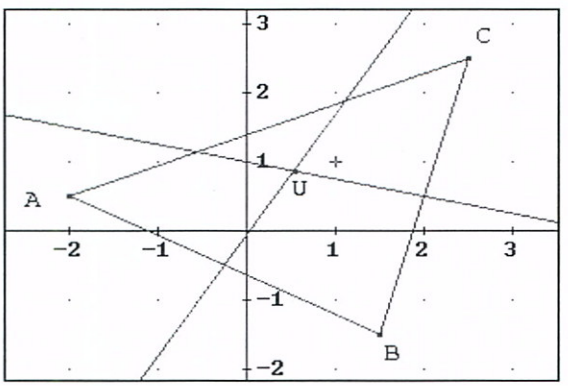
Kapcsoljuk be az automata egyszerűsítés üzemmódot az **Megjelenítési lehetőségek > Egyszerűsítés ábrázolás előtt** utasítással. Ábrázoljuk a #7 kifejezést.



Számítsuk ki a BC felező merőlegesét: *g2:=perp_bisector(b,c)*. Számítsuk ki a két felező merőleges metszéspontját: *U:=intersect(g1,g2)*

```
#8:  g2 := PERP_BISECTOR(B, C)
#9:  U:=intersect(g1,g2)
```

Rajzoljuk meg a BC felező merőlegesét a #8 ábrázolásával, majd jelenítsük meg a metszéspontot a #9 ábrázolásával. A metszésponthoz illesszük be az U címkét.



Kiszámíthatnánk és ábrázolhatnánk a harmadik felező merőlegest is. Mivel azonban ennek a feladatnak a célja a háromszög köré írt kör meghatározása (és nem annak a bemutatása, hogy a három felező merőleges egy pontban metszi egymást), ettől most eltekintünk.

U a körül írt kör középpontja. Számítsuk ki a kör sugarát, azaz az U és valamelyik csúcs távolságát. Használjuk az **ABS** abszolút érték függvényt a számításhoz.

A kör sugarának kiszámításához írjuk be: *r:=abs(u-a)*

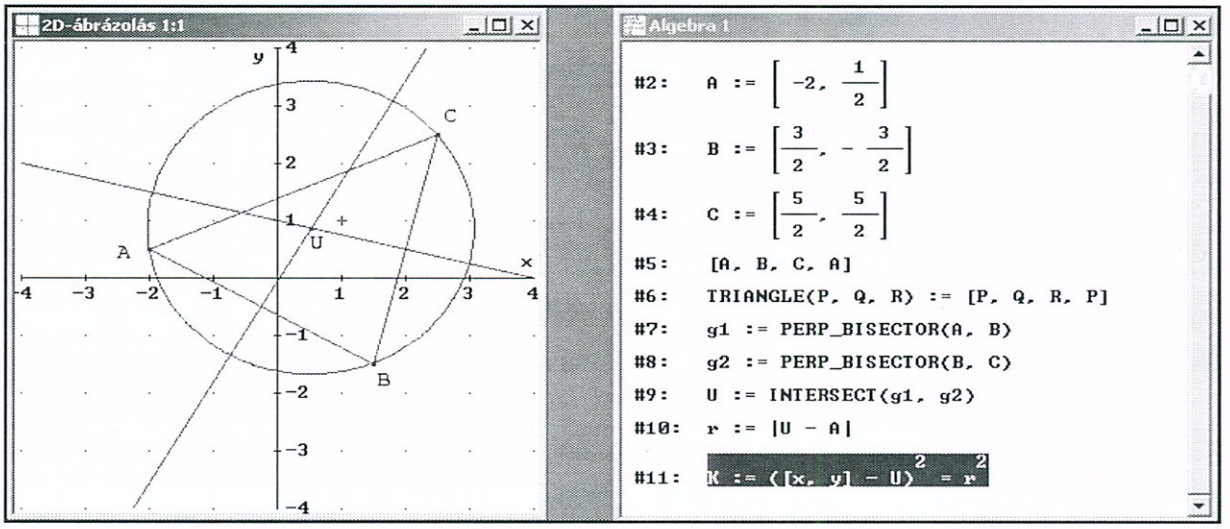
```
#10: r := |u - A|
```

A háromszög köré írt kör beírásához használjuk a $([x, y] - \rho u)^2 = r^2$ egyenletet.

Határozzuk meg a kör egyenletét beírva a következőt: *K:=([x,y]-u)^2=r^2*

```
#11: K := ([x, y] - u)^2 = r^2
```

Rajzoljuk meg a kört a #11 ábrázolásával és használjuk a **Beállítások > Képméretarány** utasítást, hogy valóban kört kapjunk. Használjuk a dialógusablak TÖRLÉS gombját, majd zárjuk be.



Nagyítsuk az algebra ablakot, hogy a két ablak között most keletkezett rést megszüntessük.

Ez idáig minden számítás rejtve maradt, azaz nem voltak láthatók az adott eredmények (egyenletek, koordináták, számok). Számos módszer van arra, hogy például megjelenítsük a kör egyenletét. Beírhatnánk a K nevet és egyszerűsíthetnénk. De van egy másik elegáns megoldás is.

Jelenítsük meg a kör egyenletét. Jelöljük ki a #11 hozzárendelés jobb oldalát ...

$$\#11:\quad K := ([x, y] - u)^2 = r^2$$

...majd egyszerűsítsük.

$$\#12:\quad K := \frac{16384 \cdot x^2 - 17408 \cdot x + 16384 \cdot y^2 - 28416 \cdot y + 16945}{16384} = \frac{107185}{16384}$$

Az előzőekből egyértelműen definiálhatjuk a CIRCUMCIRCLE függvényt, amellyel a háromszög három csúcsából (azok koordinátáiból) kiszámíthatjuk a köré írt kör egyenletét. Először definiáljunk egy segédfüggvényt, amellyel az M középpontjából és a kör egy P pontjából meghatározza a kört a következő egyenlettel: $(\vec{x}-\vec{m})^2 = |PM|^2$.

Definiáljuk a CIRCLE függvényt a következővel: *CIRCLE(M,P):= ([x,y]-M)^2=abs(M-P)^2*

$$\#13:\quad CIRCLE(M, P) := ([x, y] - M)^2 = |M - P|^2$$

A következő, CIRCUMCIRCLE függvény feltételezi, hogy a PERP_BISECTOR, az INTERSECT és a CIRCLE függvények hozzáférhetők. (Ezeknek a függvényeknek elérhetőknek kell lenni a függvény definiálásakor és használatakor is.) A CIRCUMCIRCLE behívja a CIRCLE függvényt, hogy meghatározza a középpontot, mint két felező merőleges metszéspontját és kiválasztja az egyik csúcsot, mint a kör egy pontját.

💻 Definiáljuk a CIRCUMCIRCLE függvényt beírva a következőt: *CIRCUMCIRCLE(P,Q,R):=circle(intersect(perp_bisector(P,Q),perp_bisector(P,R)),P)*

```
#14: CIRCUMCIRCLE(P,Q,R):= CIRCLE(INTERSECT(PERP_BISECTOR(P,Q),PERP_BISECTOR(P,R)),P)
```

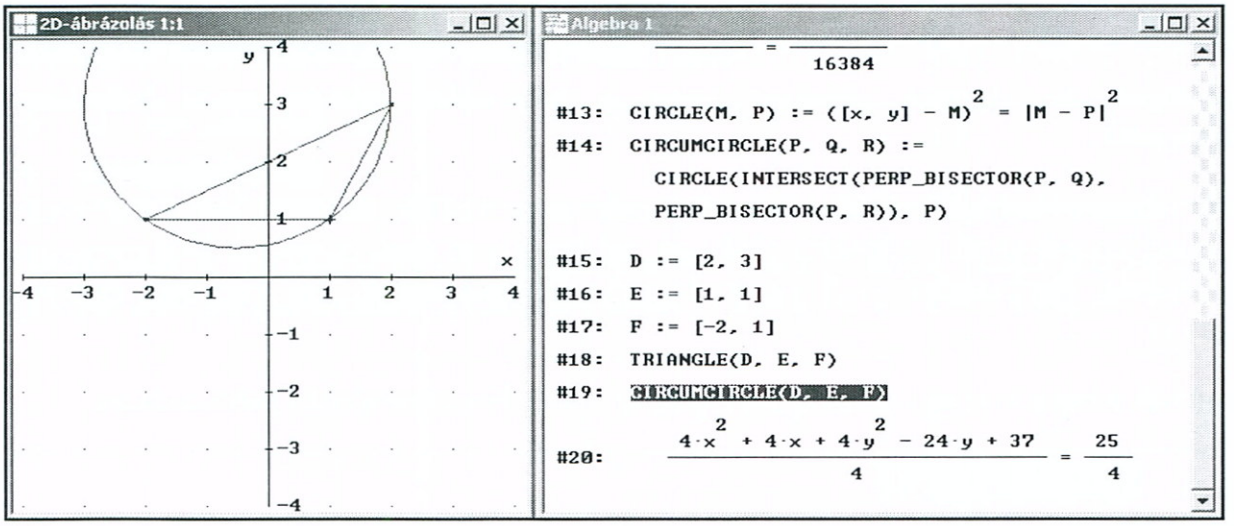
Próbáljuk ki a függvényt a *DEF* háromszögre, ahol D(2, 3), E(1, 1), F(-2, 1).

💻 Vigyük be a három pontot: *D:=[2,3], E:=[1,1] és F:=[-2,1]*. Vigyük be a háromszöget: *triangle(d,e,f)*.

Számítsuk ki a köré írható kört. Írjuk be és egyszerűsítsük: *circumcircle(d,e,f)*

Töröljünk mindent az ábrázolás ablakból a **Szerkesztés > Összes ábra törlése** és a **Szerkesztés > Összes megjegyzés törlése** utasításokkal.

Rajzoljuk meg a háromszöget és a köré írható kört a #18 és #19 ábrázolásával.



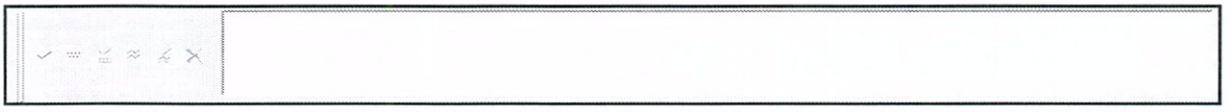
Mi történik, ha a PERP_BISECTOR függvényt két egybeeső pontra alkalmazzuk? Próbáljuk ki.

💻 Írjuk be és egyszerűsítsük: *perp_bisector(a,a)*

```
#21: PERP_BISECTOR(A, A)
#22:                                    0 = 0
```

Ezt a megoldást értelmezhetjük úgy is, hogy „bármely egyenes". Valójában azonban két egybeeső pont esetében a felező merőlegesnek nincs geometriai értelme. A függvény egy továbbfejlesztett változata figyelembe kell hogy vegye ezt a speciális esetet is.

💻 Kapcsoljuk be a többsoros kifejezések bevitele funkciót.



Definiáljunk egy sokkal informatívabb függvényt a felező merőlegesre a következőképpen:

```
PERPENDICULAR_BISECTOR(P,Q):=        ALT + ENTER
    If(P=Q,                          ALT + ENTER
        "undefined",                 ALT + ENTER
```

perp_bisector(P,Q)) ENTER

```
PERPENDICULAR_BISECTOR(P,Q):=
  If(P=Q,
        "undefined",
        perp_bisector(P,Q))
```

A definíció jobb oldalának olvasata: *„Ha P=Q-val, a függvény értéke az 'undefined' szöveg, más esetben a P-re és Q-ra a PERP_BISECTOR függvény kerül alkalmazásra."* Az if függvény egy, két, három vagy négy argumentumot használ.

- Az első argumentum egy feltétel, amelyben használhatjuk a relációs műveleti jeleket =, <, ≤,>,≥, ≠, a Boolean operátorokat **AND OR**, **NOT**, **XOR** és **IMP** (az **XOR** a kizárásos **OR**-nak felel meg, az **IMP** jelentése: beleértve). Használhatjuk a **NOT** helyett a – jelet, az **OR** helyett a ∨, az **AND** helyett pedig a ∧-t.
- A második argumentum egy kifejezés, mely akkor kerül alkalmazásra, ha teljesül a feltétel.
- A harmadik argumentum egy kifejezés, mely akkor kerül alkalmazásra, ha nem teljesül a feltétel.
- A negyedik argumentum egy kifejezés, mely akkor kerül alkalmazásra, ha feltétel nem dönthető el a **DERIVE**-val.

Figyeljük meg a #23 több sorban történő megjelenítését, mely segíti a logikai felépítésének áttekintését.

Próbáljuk ki az új függvényt két azonos argumentummal.

```
#24: PERPENDICULAR_BISECTOR(A,A)=undefined
```

Az algebra ablak **Fájl > Mentés másként** utasítása lehetővé teszi, hogy a kifejezéseket olyan fájl formában mentsük, amely lehetővé teszi, hogy visszatöltsük a **DERIVE**-ba. A **Fájl > Kiírás** utasítás egy almenübe vezet, mely lehetőséget kínál, hogy **DERIVE** kifejezéseket különböző programnyelvekben használható formátumba mentsünk: **Basic fájl, C fájl, Fortran fájl** és a **Pascal fájl** a programnyelvek választéka.

Az ábrázolás ablak **Fájl > Exportálás** utasítása felhasználható az ábrák szokásos grafikai formátumban történő mentésére: **DIB fájl, JPEG fájl, TARGA fájl** és **TIFF fájl** a lehetséges alternatívák.

A **Fájl > Nyomtatás** utasítást az aktív ablak kifejezéseinek és/vagy ábráinak a kinyomtatására használjuk. A **Fájl > Nyomtatási kép** (itt megtekinthetjük, hogy kinyomtatva hogy néz majd ki munkánk) és a **Fájl > Oldalbeállítás** (itt beállíthatjuk a margókat) rendelkezésre áll mindkét ablakformában. Ezek az utasítások azonosan működnek a grafikai és az algebra munkalapok esetében.

Számos lehetőségünk van, amellyel a **DERIVE** ábrákat/kifejezéseket a **WINDOWS** vágólapra helyezzük:

- Nyomjuk meg a PRTSC billentyűt, hogy mentsük a képernyő teljes tartalmát, benne a **DERIVE**-ot, vagy bármely más alkalmazást vagy az asztal tartalmát.
- Nyomjuk meg az ALT + PRTSC kombinációt, ha a képernyőnek csak a **DERIVE** alkalmazás részét akarjuk menteni.
- Az algebra ablakban használjuk a **Szerkesztés > Másolás** utasítást, vagy a CTRL + C kombinációt, hogy a kijelölt kifejezés(eke)t a vágólapra másoljuk.

- Az algebra ablakban használjuk a **Szerkesztés > Kivágás** utasítást vagy nyomjuk meg a CTRL + X kombinációt, ha a kijelölt kifejezés(eke)t a vágólapra akarjuk másolni és egyben törölni az ablakból.
- A 2D-, vagy 3D-ábrázolás ablakban használjuk a **Szerkesztés > Grafikus ablak másolása** utasítást, illetve a CTRL + SHIFT + M billentyű kombinációt hogy az ábrázolás ablakot bitmap formátumban a vágólapra helyezzük.
- Akármelyik ablakban használhatjuk a **Szerkesztés > Kijelölés és másolás** utasítást vagy a CTRL + SHIFT +M kombinációt, ha a képernyő egy négyszögletes részét ki akarjuk jelölni és azt a vágólapra akarjuk helyezni.

Lépjünk ki a **DERIVE**-ból mentés nélkül.

Összefoglalás

Algebra ablak

Fájl>Betöltés > Segéd fájl ..... függvény megadások betöltése egy segéd fájlból
Fájl > Kiírás ..... kifejezések kiírása különböző programnyelvek fájljába
Szerkesztés > Kijelölés és másolás ..... terület kijelölése és másolása a vágólapra
Képlet készítő > Függvények megadása ..... függvények megadásának megváltoztatása
dupla kattintás a vektor bal oldalán ..... vektor szerkesztése(**Vektor tulajdonságai**)
kattintás a kijelölt objektumon kívülre a CTRL-t lenyomva tartva.....
..... objektum kijelölésének megszüntetése

2D-ábrázolás ablak

Fájl > Exportálás ..... grafikus ablak különböző formátumú mentése: **DIB**, **JPEG**, **TARGA**, **TIFF**
Szerkesztés > Összes ábra törlése ..... összes ábra törlése a grafikus ablakból
Szerkesztés > Grafikus ablak másolása vagy CTRL + C ..... grafikus ablak vágólapra másolása
Beszúrás > Megjegyzés ..... új megjegyzés beszúrása a grafikus ablakba
bal egérgombot lenyomva tartva a megjegyzés felett, közben az egér mozgatása.....
.....megjegyzés mozgatása

Minden ablak

Fájl > Nyomtatás .....algebrai vagy grafikus dokumentum nyomtatása
Fájl > Nyomtatási kép ..... nyomtatási kép megtekintése
Fájl > Oldalbeállítás .....nyomtatás margóinak beállítása
PRTSC .....a **WINDOWS** képernyő vágólapra másolása a **DERIVE**-val együtt
ALT + PRTSC .....a képernyő **DERIVE**-ot tartalmazó részének vágólapra másolása

Függvények

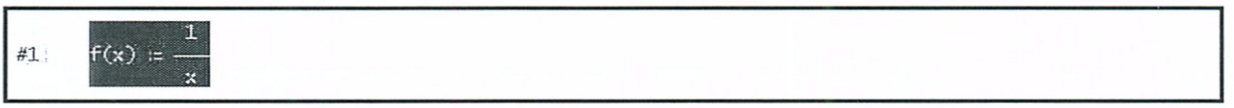
SOLUTIONS ..... egyenlet, vagy egyenletrendszer megoldása (megjelenítés pontok halmazaként)
SOLVE..... egyenlet, vagy egyenletrendszer megoldása (megjelenítés logikai kifejezésként)

12. fejezet

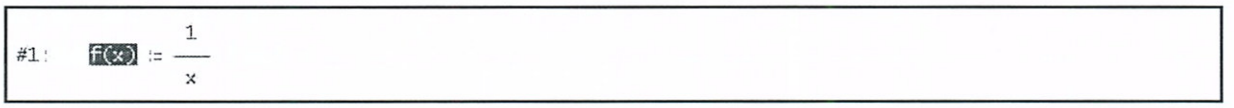
Egy kis analízis

Most megoldunk néhány számítási problémát, köztük a határértékkel, deriválással, integrálással és differenciálszámítással kapcsolatos egyenletet.

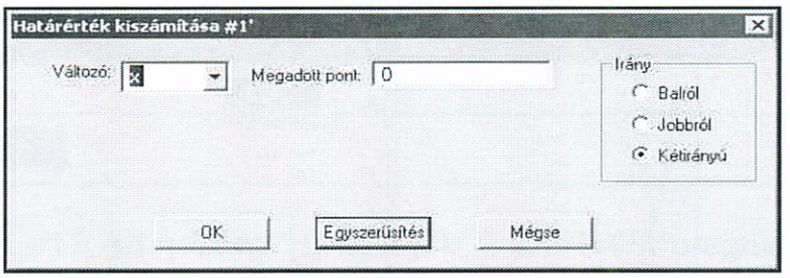
Indítsuk a **DERIVE**-ot alapbeállításban. Definiáljuk *f* függvényt: $f(x) := 1/x$



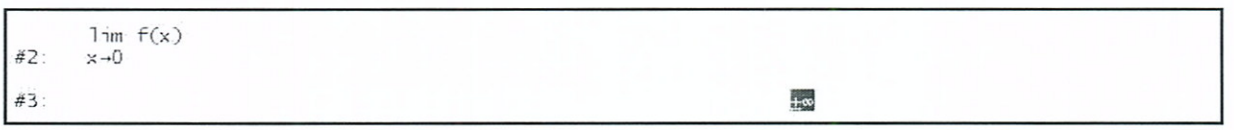
Ha ki akarjuk *f(x)* határértékét számolni *x* tart a nullához esetére, jelöljük ki a kifejezés bal oldalát.



A **Határérték meghatározása** gombbal lim, vagy az **Analízis > Határérték** utasítással nyissuk a párbeszédablakot

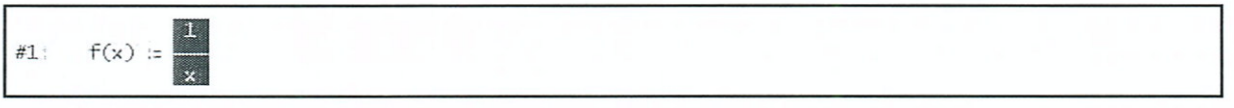


Hagyjuk jóvá a vezérlő paramétereket: x-et a **Változó** mezőben, 0-t a **Megadott Pont** mezőben és a **Kétirányú**-t a határérték irányára vonatkozóan és lépjünk ki az EGYSZERŰSÍTÉS gombbal.

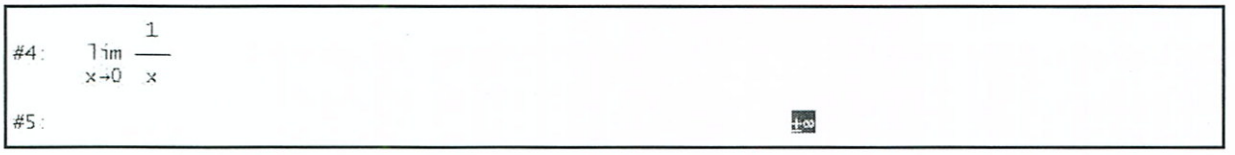


A függvények legtöbbször számokat fogadnak el bemenetként és számokat adnak kimenetként. A fentiekben látjuk, hogy a **LIM** elfogadja az *f(x)* függvényformát egyik bemenetként, melyet az *1/x* kifejezés, vagyis az *f(x)* definíciója követ. A **DERIVE** lehetővé teszi, hogy a **LIM**-et közvetlenül használjuk az olyan kifejezésekre, mint az *1/x*, amely felhasználható egy függvény definiálására.

Most jelöljük ki a #1 hozzárendelés jobb oldalát ...

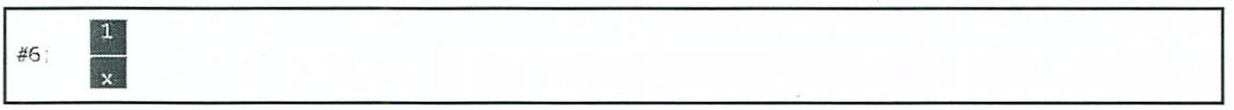


... majd a **Határérték meghatározása** gombra lim kattintva végezzük el a kétirányú határérték számítást.

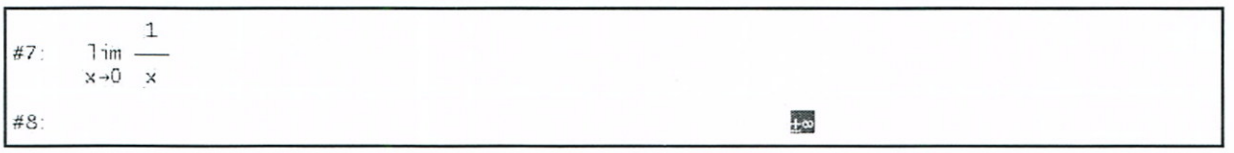


Valójában nincs is szükség az *f(x)* definiálására. Egyszerűen vigyük be az *1/x*-et és erre a kifejezésre alkalmazzuk a **LIM** függvényt.

Írjuk be: *1/x*

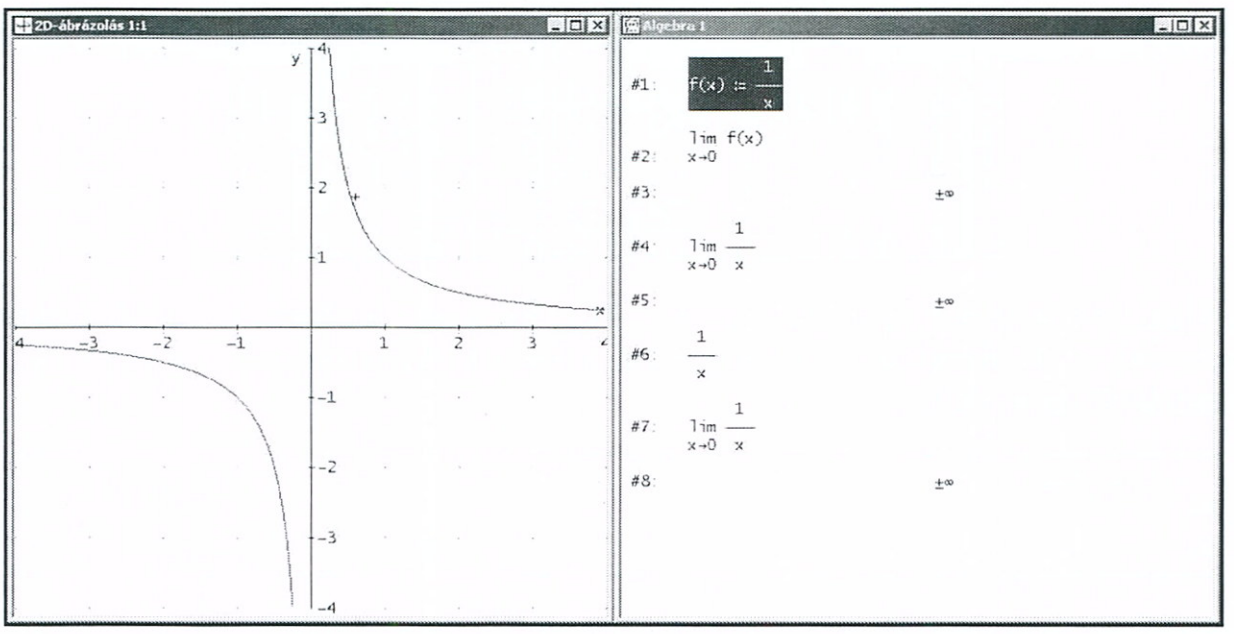


Keressük meg a #6 kifejezés határértékét a **Határérték meghatározása** gombra lim kattintva.



Illusztráljuk az eredményt a függvény ábrájával.

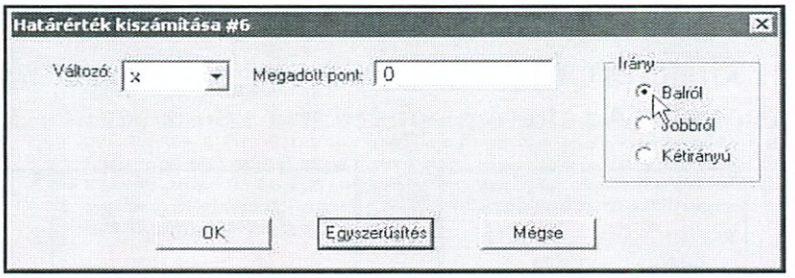
Rajzoljuk meg a függvény ábráját a #1 vagy a #6 kifejezés megjelenítésével. Jelöljük ki a #1-et és a szokásos módon ábrázoljuk.



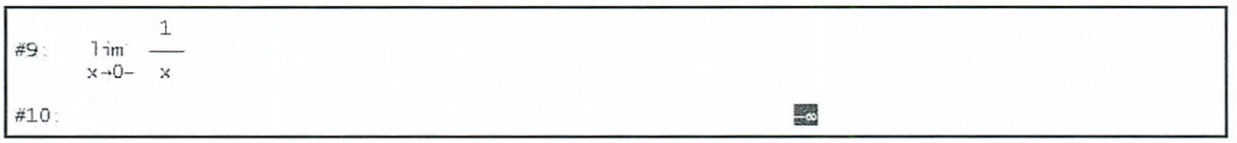
Ha x balról közelít a nullához, az ábra mínusz végtelenhez tart. Ha x jobbról közelít nullához, az ábra plusz végtelenhez tart. Ezért nem kapunk egy kifejezett határértéket egyik oldalon sem és a **DERIVE** a $\pm\infty$ eredményt adja.

A határérték számítás irányát megadhatjuk csak jobbról vagy csak balról a **Határérték kiszámítása** dialógusablakban kijelölve azt.

Számítsuk ki a bal oldali határértéket: Jelöljük ki a #6 kifejezést, kattintsunk a **Határérték meghatározása** gombra lim és válasszuk a **Balról** gombot az **Irány** mezőben.



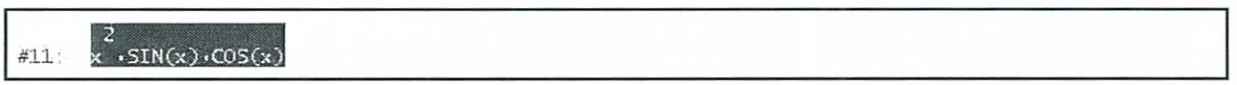
Lépjünk ki az ablakból az EGYSZERŰSÍTÉS gombbal.



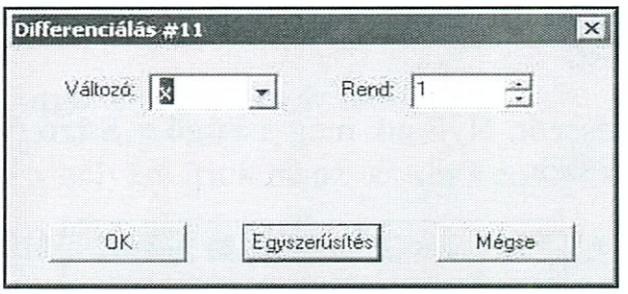
Következzen a differenciálás. A differenciálást felfoghatjuk úgy is, hogy egyik argumentumaként egy függvényt használ és egy új függvényt kapunk eredményként. Azonban ugyanúgy, ahogy a **LIM** esetében a differenciálást is használhatjuk közvetlenül egy kifejezésre, amellyel meghatározhatnánk az *f(x)*-et, anélkül, hogy ténylegesen meg kellene határoznunk *f(x)*-et.

Számítsuk ki az $f(x) = x^2 \sin x \cos x$ függvény x szerinti első deriváltját. Innentől kezdve, kényelmi szempontból a műveleteket közvetlenül a kifejezésekre alkalmazzuk, amelyekkel függvényeket definiálhatnánk.

Írjuk be az $f(x) = x^2 \sin x \cos x$ függvényt definiáló kifejezést:



Differenciáljuk a #11 kifejezést: Használjuk a **Derivált meghatározása** gombot ∂ (vagy az **Analízis > Differenciálás** utasítást) ...

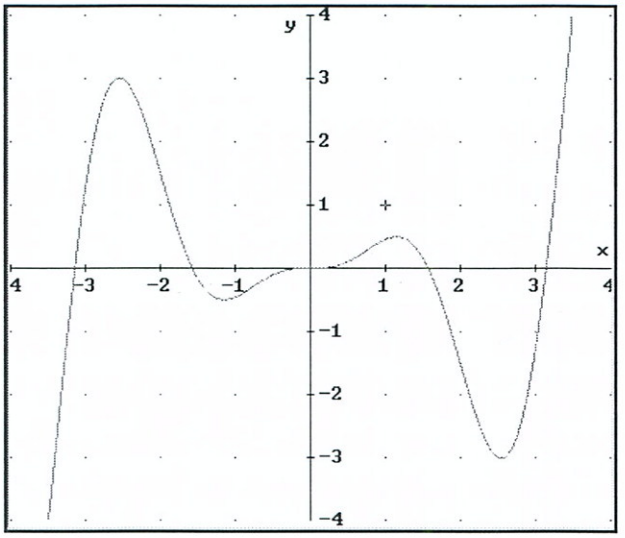


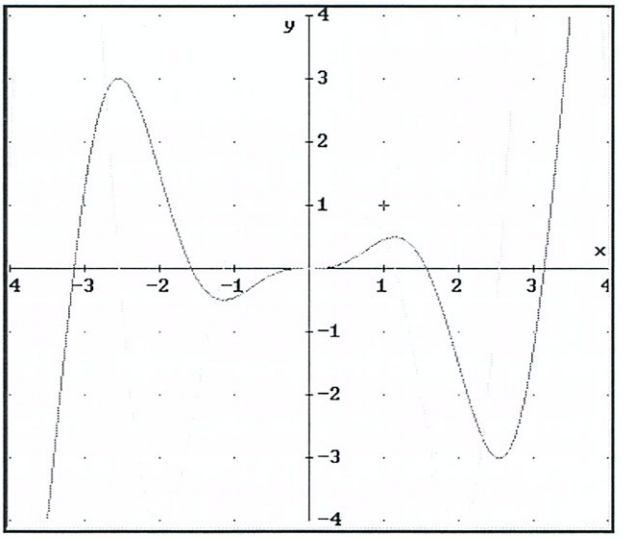
...hagyjuk jóvá x differenciálási változót a **Változó** mezőben és a differenciálás rendjét a **Rend** mezőben, zárjuk az ablakot az EGYSZERŰSÍTÉS gombbal.

A **Rend** mezőbe negatív egész számokat is beírhatunk, ami integrálást jelöl.

Jelenítsük meg a példánkat az $f(x) = x^2 \sin x \cos x$ függvény és a deriváltja ábrázolásával.

Rajzoljuk meg az *f(x)* és az *f '(x)* ábráit. Töröljük az *1/x* ábráját. Jelöljük ki az $x^2 \sin x \cos x$-et (#11 kifejezés), majd ábrázoljuk (bal oldali kép). Jelöljük ki a deriváltját (#13 kefejezés) és ábrázoljuk. (Az eltérő megjelenítési színek segítenek az áttekintésben.)





Vizsgáljuk meg az első derivált geometriai jelentését, értékeljük a deriváltat egy pontban és tanulmányozzuk az eredmény jelentését.

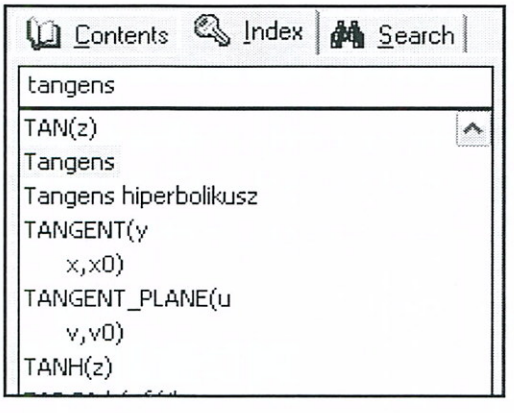
A deriváltban x-et helyettesítsük 3/2-del. Győződjünk meg róla, hogy a derivált ki van jelölve. A **Változó behelyettesítése** gomb $\boxed{\text{SUB}}$ segítségével írjuk be a 3/2-et és zárjuk az ablakot a (nem alapértelmezett) EGYSZERŰSÍTÉS gombbal, majd számítsuk ki a közelítő értékét.

#14: $\frac{9 \cdot \cos(3)}{4} + \frac{3 \cdot \sin(3)}{2}$

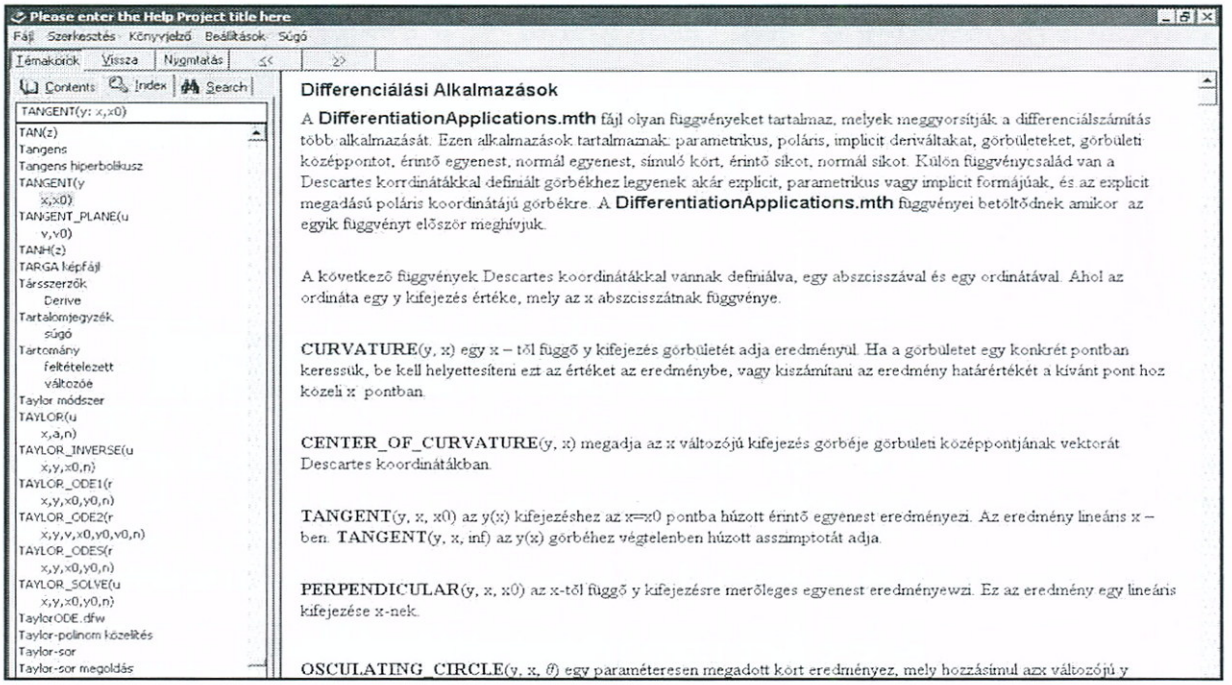
#15: -2.015803105

Nézzük meg mit jelent ez a szám. Húzzuk meg az $f(x) = x^2 \sin x \cos x$ ábrájának érintőjét x=3/2-nél. Használjuk a **DERIVE** online súgóját ahhoz, hogy hogyan kell kiszámítani és ábrázolni egy érintő egyenest.

Keressük a **tangens** kulcsszót. Nyissuk meg a **Súgó > Súgó (index)** ablakot és gépeljük a beviteli mezőbe a *tangens* szót.



Kattintsunk duplán abba a sorba, amelyben a **TANGENT**(y,x,x0) kifejezést találjuk.



A **TANGENT** függvény a **DIF_APPS.MTH** állomány része és egyike a **DERIVE**-ban található számos segédfájlnak. Maga az állomány a differenciálás alkalmazásának függvényeit tartalmazza. Az online súgó magyarázatot ad a **TANGENT** függvény használatára és tartalmaz egy sablont is.

💻 Jelöljük ki a sablont és másoljuk a vágólapra a CTRL + C-vel.

TANGENT(y, x, x0) az y(x) kifejezéshez az x=x0 pontba húzott érintõ egyenest eredményezi. Az eredmény lineáris x – ben. **TANGENT**(y, x, inf) az y(x) görbéhez végtelenben húzott asszimptotát adja.

💻 Zárjuk az online súgót a ☒ gombra kattintva és tegyük a beviteli sort aktívvá. Másoljuk be a vágólap tartalmát a CTRL + V-vel

TANGENT(y,x,x0)

Helyettesítsük az általános argumentumokat az ideillőkkel.

💻 Az első argumentum, az *y* helyére írjuk be az $x^2 \sin x \cos x$ kifejezés címkéjét, a#11-et.

(Használhatnánk magát a kifejezést is, de a címkéje rövidebb. A harmadik argumentumban az x0 helyére írjuk be azt a pozíciót, 3/2-et, ahol az érintőt szeretnénk kiszámítani.

TANGENT(#11,x,3/2)

💻 Vigyük be a ↵-vel, majd egyszerűsítsük.

$$\#16: \quad \text{TANGENT}\left(x^2 \cdot \text{SIN}(x) \cdot \text{COS}(x),\ x,\ \frac{3}{2}\right)$$

$$\#17: \quad \frac{9 \cdot (2 \cdot x - 3) \cdot \text{COS}(3)}{8} + \frac{3 \cdot (4 \cdot x - 3) \cdot \text{SIN}(3)}{8}$$

A **TANGENT** függvény automatikusan betöltésre kerül az említett segédfájlból. A #17 kifejezés az érintő függvényt képviseli. A #17 annak az egyenesnek az egyenlete, amely érintője az *y=f(x)*-nek x=3/2 értékénél, ahol *f(x)*-et a #11 kifejezéssel definiáltuk.

Számítsuk ki a #17 közelítő értékét.

#18: $8.850742732 \cdot 10^{-13} \cdot (3.595703505 \cdot 10^{12} - 2.277552479 \cdot 10^{12} \cdot x)$

Ez a változat nem igazán áttekinthető. Bontsuk tehát tényezőkre.

Bontsuk a #18-at tényezőkre.

#19: $\frac{1591232333165283783}{500000000000000000} - \frac{5039507762564458157 \cdot x}{2500000000000000000}$

Mivel az **Egyszerűsítés > Kibővít** utasítás az egyszerűsítés eszközei közé tartozik, az eredmény tényezőit racionális számokban kapjuk.

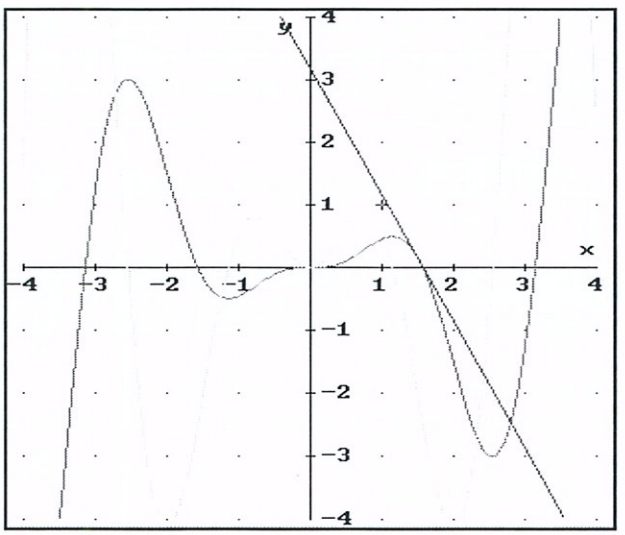
Alakítsuk a tényezőket tizedes törtekké a #19 közelítő értékének számításával.

#20: $3.182464666 - 2.015803105 \cdot x$

Ismerősnek tűnik a második tényező? Ez az a szám, amelyet az x=3/2 értékénél számított első derivált kiértékelésénél kaptunk. Lásd a #15-öt.

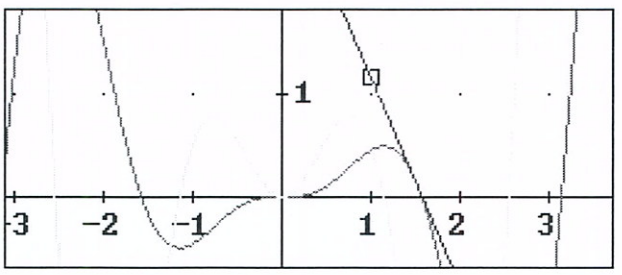
Lépjünk át a 2D-ábrázolás ablakba és nézzük meg a geometriai megjelenítést.

Rajzoljuk meg az érintőt a #20 ábrázolásával.



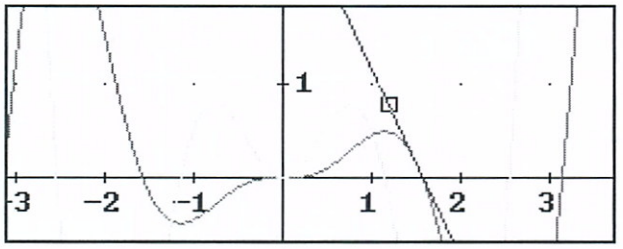
Tanulmányozzuk az ábrákat az ábra követés üzemmódban.

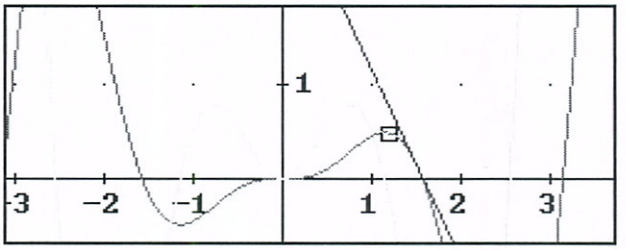
Kapcsoljuk be az ábra követés üzemmódot az **Ábra követése** gombbal.



A követő négyzet a legutóbb megjelenített objektumra került, vagyis az érintőre.

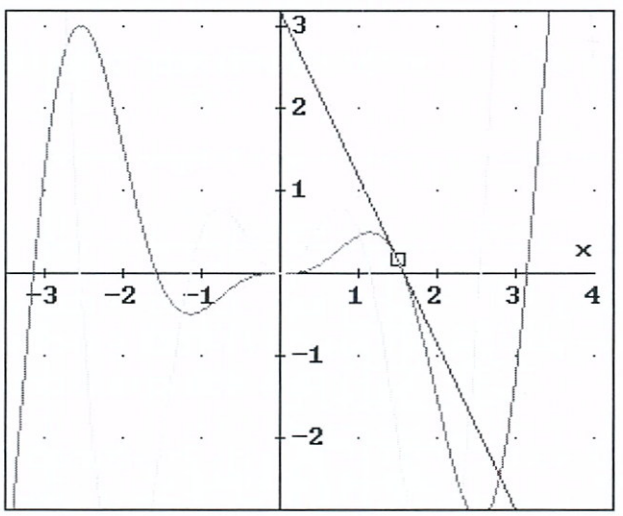
Mozgassuk egy kicsit jobbra a → billentyűvel, majd a ↑ billentyűvel helyezzük át a $y = x^2 \sin x \cos x$ ábrájára.

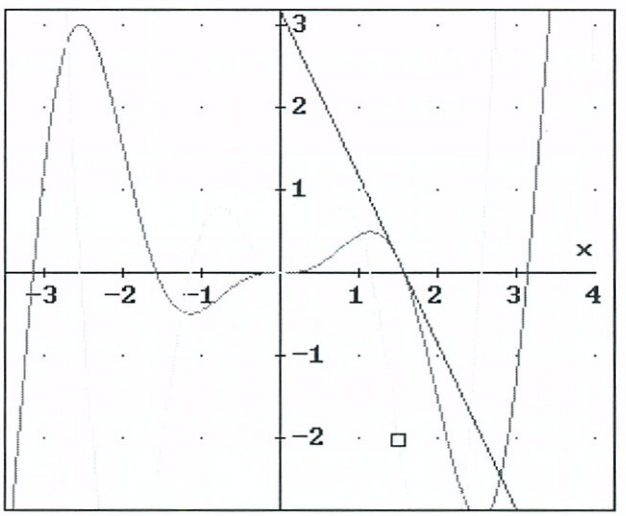




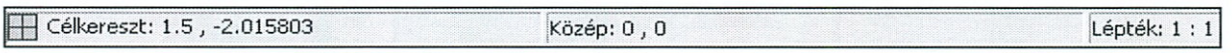
Míg a jobb és bal iránybillentyűk a görbén mozgatják el a követő négyzetet, addig a le és fel billentyűk lehetőséget adnak, hogy kiválasszuk, melyik görbét akarjuk követni (ez csak a függvények ábrázolására érvényes – az implicit ábrákat figyelmen kívül hagyja. A **DERIVE** létrehoz egy ábra listát, amelyen belül a le és fel billentyűkkel lépkedhetünk. A 2D-ábrázolás ablakban olvashatjuk a pillanatnyilag követett ábra kifejezésének számát.

Győződjünk meg arról, hogy a négyzet a #11 kifejezés görbéjén van (ha nem, használjuk a ↑ billentyűt) és mozgassuk az x=3/2 értékre, azaz amikor x=1,5 (bal oldali kép). A ↑ billentyűvel lépjünk át a derivált ábrájára.





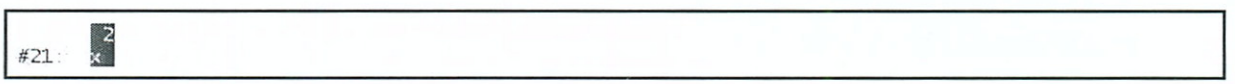
Az állapotsor első paneljában ismét látjuk az érintő második együtthatóját.



Ez megerősíti, hogy az f függvény érintőjének meredeksége x_0-nál egyenlő az x_0 pontban számított f' deriválttal. (Az csak véletlen egybeesés, hogy f egyik nulla értéke közel esik a 3/2-hez)

Lépjünk át a **TANGENT** függvény alkalmazásának egy másik példájára.

Írjuk be az x^2-et.



A **TANGENT** függvénnyel számítsuk ki az érintőt egy általános a pontban.

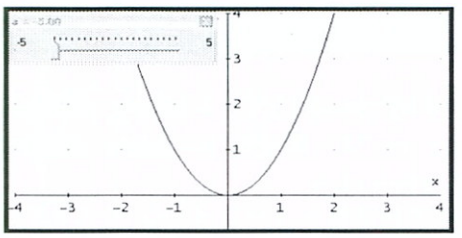
Írjuk be és egyszerűsítsük: $tangent(x\text{^}2,x,a)$

#22: TANGENT(x^2, x, a)

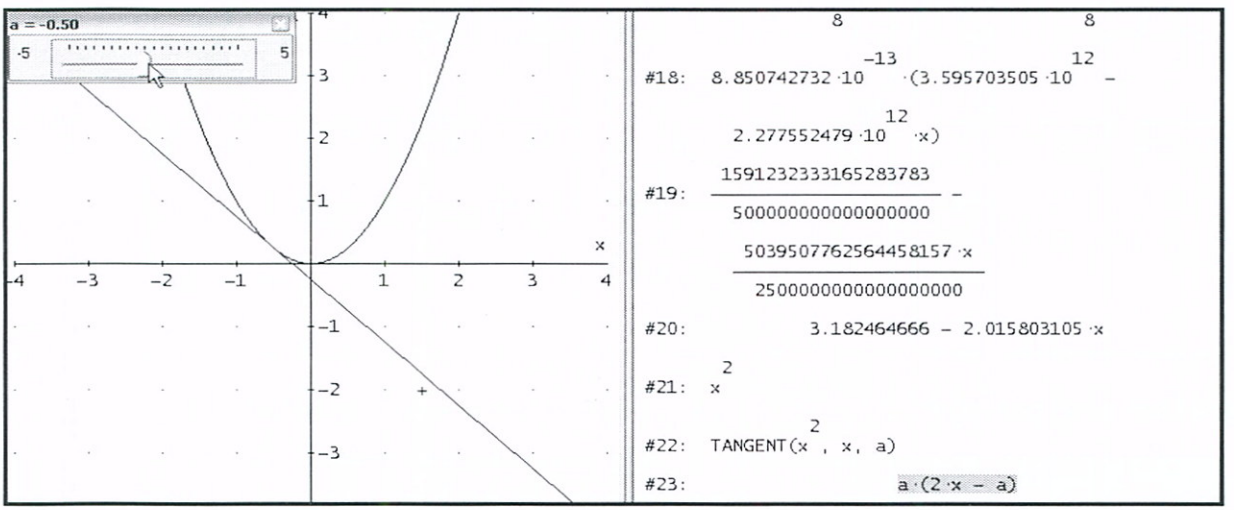
#23: $2 \cdot a \cdot x - a^2$

Az $y = x^2$ érintője az $x_0 = a$ pontban $y = a \cdot (2x - a)$.

Töröljük a régi ábrákat és megjegyzéseket. Kapcsoljuk ki az automatikus megjegyzéseket a **Megjelenítési lehetőségek > Új ábrákhoz megjegyzés** menüpontban. A **Beszúrás > Vonalzó** menüpont választása után megjelenő ablakon állítsuk be: **Változó neve**: a, **Minimum érték**: -5, **Maximum érték**: 5, **Intervallumok**: 20. A Csúsztatás közben ábra frissítése funkció legyen bekapcsolva (kipipálva).
Ábrázoljuk a $y = x^2$ függvényt.



Jelöljük ki és ábrázoljuk a #23 kifejezést. Mozgassuk a vonalzón a csúszkát, hogy lássuk a különböző érintőket.



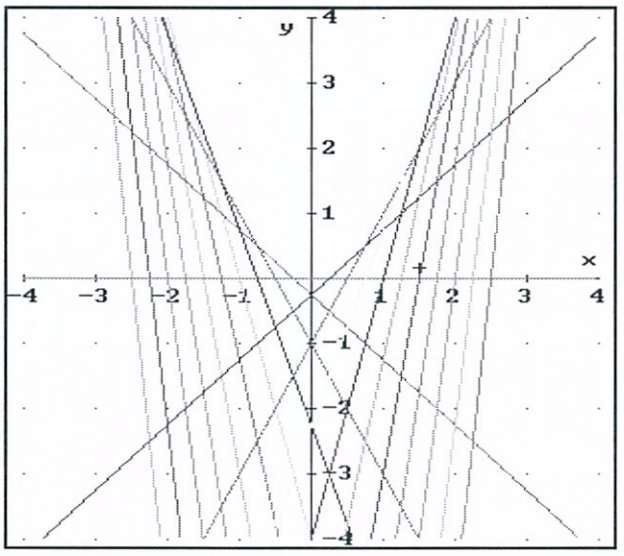
Mint statikus megoldás, alkalmazzuk a **VECTOR** függvényt a #22 (vagy #23) kifejezésre, hogy kiszámítsunk a -ra egy érintő családot -5-től 5-ig 1/2-es léptékkel.

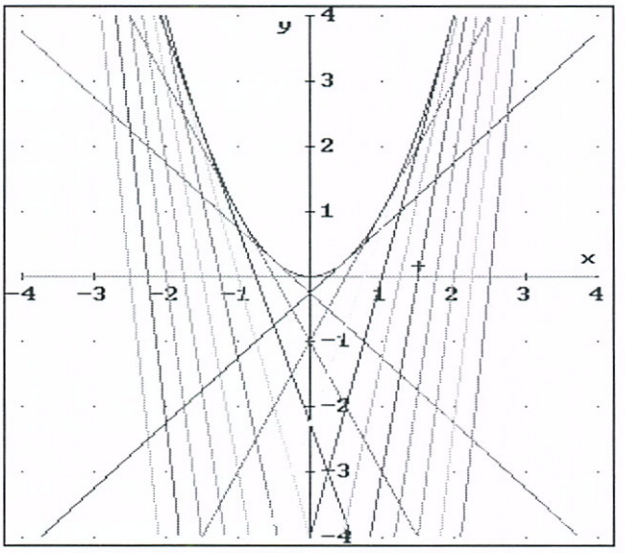
Generáljuk az érintők családját: Jelöljük ki a #22-t és alkalmazzuk az **Analízis > Vektor** utasítást. A **Változó** mezőben válasszuk az a -t, legyen a **Kezdőérték** -5 és az **Végérték** 5. A **Lépésköz** mezőben válasszunk ½-et. Lépjünk ki a párbeszédablakból a nem alapértelmezett OK-val, hogy ne generáljunk egy szükségtelenül hosszú vektort.

#24: VECTOR(TANGENT(x^2, x, a), -5, 5, $\frac{1}{2}$)

Ábrázoljuk az érintők családját: Töröljük az előző ábrákat és kapcsoljuk be az automatikus egyszerűsítést az **Megjelenítési lehetőségek > Egyszerűsítés ábrázolás előtt**

menüpontban. Ábrázoljuk először az érintőket a #24 kifejezésből (bal oldali kép), majd jelenítsük meg az $y = x^2$ -et.





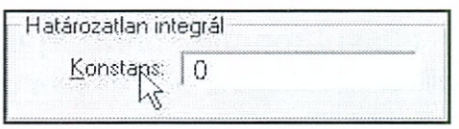
A következő témánk az integrálás. Integráljuk az $f(x) = x^2 \sin x$ -et.

Írjuk be az $x^2 \sin x$ -et és alkalmazzuk az **Integrál meghatározása** utasítást alapértelmezett paraméterekkel a ∫ gombra kattintva.

```
#25:  x^2·SIN(x)

#26:  ∫ x^2·SIN(x) dx

#27:                    2
                 (2 - x )·COS(x) + 2·x·SIN(x)
```

Alapértelmezésben határozatlan integrálás történik. A legtöbb integrál táblázathoz hasonlóan a **DERIVE** nem használ integrálási állandót. Ránk van bízva, hogy megadunk-e egyet az **Integrálás** dialógusablakban.

Végezzük el újra az integrál kiszámítását úgy, hogy most hozzáadjuk az integrálási állandót: Jelöljük ki a #25 kifejezést és kattintsunk újra a ∫ gombra. A **Határozatlan integrál** részben a **Konstans** mezőben írjuk át az alapértelmezett 0-t c-re.

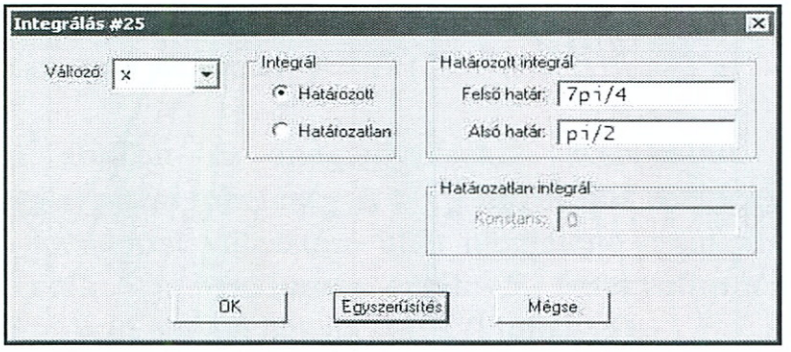


Zárjuk a dialógusablakot az EGYSZERŰSÍTÉS-re kattintva.

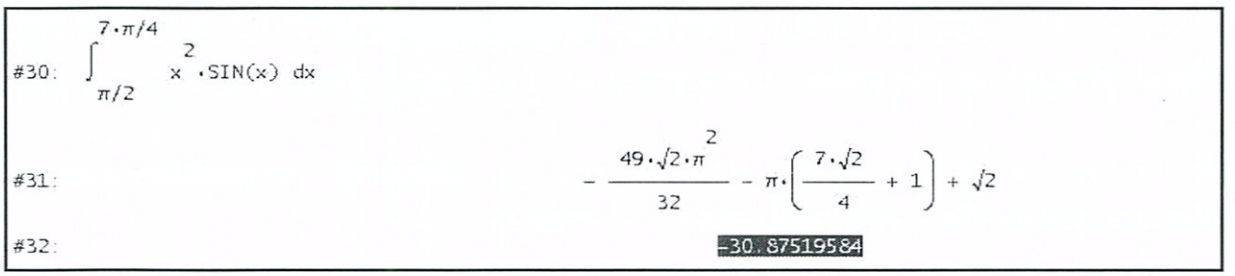
```
#28:  ∫(x^2·SIN(x), x, c)

#29:                    2
                 (2 - x )·COS(x) + 2·x·SIN(x) + c
```

Figyeljük meg, hogy ebben az esetben a **DERIVE** az egyszerűsítetlen kifejezés előtt az integrál jel helyett az **INT** függvényt használja. Máskülönben nem lehetne az integrálási konstanst jelentő c állandót hová tenni, amely az integrál állandót jelzi.

Számítsuk ki a $\int_{\pi/2}^{7\pi/4} x^2 \sin x dx$ határozott integrált. Alkalmazzuk az $\int$-t a#25-re. Jelöljük ki a **Határozott** gombot az **Integrál** mezőben és a most már aktív **Határozott integrál** részben az **Alsó határ** sorba írjunk pi/2-t és a **Felső határ** sorba 7pi/4-et.



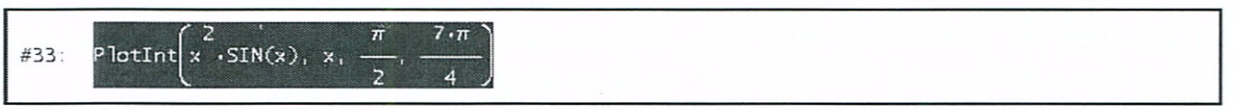
Lépjünk ki az EGYSZERŰSÍTÉS-sel és számítsunk közelítő értéket.



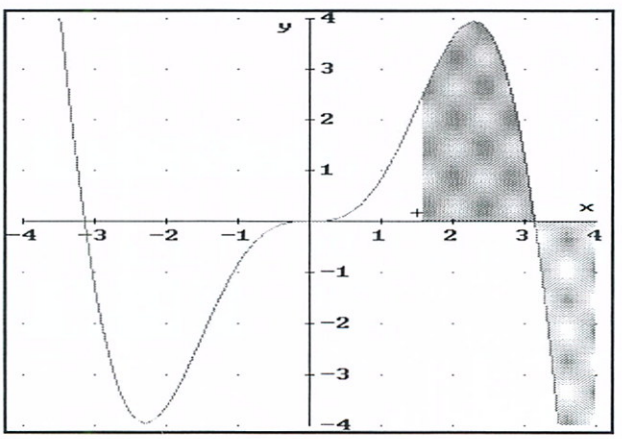
Tanulmányozzuk a kapcsolatot e szám és az $y = x^2 \sin x$ alatti terület között a π/2 és a 7π/4 közötti tartományban. Satírozzuk be ezt a területet.

Használjuk a **PLOTINT** függvényt, amely a segédfájlok között található. Alkalmazzuk ezt a függvényt a #25 kifejezésre x változóval és a határozott integrál két határával. Ez egy olyan kifejezést eredményez, amely azt a területet fedi, amely a görbe, az x tengely, valamint az alsó és felső határ közt van.

A görbe alatti terület megjelenítéséhez írjuk be: *PlotInt(#25,x,pi/2,7pi/4)*



Miután minden előző ábrát eltávolítottunk, ábrázoljuk a kifejezést. Ne felejtsük el ellenőrizni, hogy a **Megjelenítési lehetőségek > Egyszerűsítés ábrázolás előtt** be van-e kapcsolva.



A negatív és pozitív területet különböző (egymást követő) színekkel látjuk.

Ha a színek nem felelnek meg, kattintsunk néhányszor a **Kifejezés ábrázolása** gombra .

Nyissuk a képet úgy, hogy lássuk a teljes satírozott területet.

A függvényérték egy helyen nulla lesz a [π/2,7π/4] intervallumban. Számítsuk ki a határozott integrált π/2 és a zérushely, valamint a zérushely és 7π/4 között.

Számítsuk ki a zérushelyet: Generáljuk a vonatkozó egyenletet a *#25=0* bevitelével és utána alkalmazzuk a **Megoldás** utasítást .

```
#34:  x^2·SIN(x) = 0

#35:  SOLVE(x^2·SIN(x) = 0, x)

#36:                                    x = -π ∨ x = π ∨ x = 0
```

A **DERIVE** három megoldást ad, mert csak a [-π,π] intervallumban keres nullát. Az összes többi, végtelen számú megoldást 2π hozzáadásával, vagy kivonásával kaphatunk.

A fenti intervallumban a zérushely $x = \pi$ -nél van.

Számítsuk ki a határozott integrált $\pi / 2$ és π között. Kezdjük azzal, hogy kijelöljük a #34 egyenlet bal oldalát. (Kijelölhetnénk a #25 kifejezést is, de akkor görgetnünk kellene a lapot.)

```
#34:  x^2·SIN(x) = 0
```

Kattintsunk az **Integrál meghatározása** gombra , a **Felső határ** sorba írjuk be a *pi*-t, lépjünk ki a dialógusablakból az Egyszerűsítés-sel,, majd végezzük el a kiértékelést a -val.

```
#37:  ∫_{π/2}^{π} x^2·SIN(x) dx

#38:                                    π^2 - π - 2

#39:                                    4.728011747
```

Az ilyen eszközök esetén, mint az integrálás, a **DERIVE** megőrzi a feladatmegoldás közben frissen használt paramétereket. Ebből következően a **Határozott** gomb még mindig ki van jelölve, tehát a határok is be vannak írva. (A c integrálási állandó szintén a helyén van, de nem aktív, mert a határozott mód érvényes.) Ha legközelebb újraindítjuk a **DERIVE**-ot ezek az eszközök ismét az alapértelmezéssel indulnak.

Ismételjük meg az előző lépéseket és számítsuk ki az integrált π és $7\pi / 4$ között.

#40: $\int_{\pi}^{7\cdot\pi/4} x^2 \cdot \mathrm{SIN}(x)\, dx$

#41: $-\pi^2\cdot\left(\frac{49\cdot\sqrt{2}}{32}+1\right)-\frac{7\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}{4}+\sqrt{2}+2$

#42: -35.60320759

Ez az eredmény negatív, mert a megfelelő terület az x tengely alatt helyezkedik el A határozott integrál ezt a negatív előjellel tükrözi. A **PLOTINT** függvény erre az eltérő színnel utal.

Nyilvánvaló, hogy a $\int_{\pi/2}^{7\pi/4} x^2 \sin x dx$ nem az x tengely és az $y = x^2 \sin x$ közti területet adja a $\pi/2$ és $7\pi/4$ között intervallumban. Az ok az, hogy a terület két részből áll. A $\pi/2$ és π közötti terület pozitív (4,728); a π és $7\pi/4$ közti rész az x tengely alatt van, tehát negatív (-35,603). A $\pi/2$ és $7\pi/4$ közti integrál ennek a két számnak az összege, vagyis -30,875. Geometriai szempontból a terület a két integrál, a $\int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \sin x\, dx$ és a $\int_{\pi}^{7\pi/4} x^2 \sin x\, dx$ abszolút értékének az összege.

💻 Számítsuk ki a területet az *abs(#39)+abs(#42)* beírásával és kiértékelésével.

#43: |4.728011747| + |-35.60320759|

#44: 40.33121933

A következőben nézzünk egy olyan függvényt amelyet a **DERIVE** nem tud analitikusan integrálni. A $\int_3^4 \frac{\sin x}{x} dx$ nem számítható ki pontosan, mert a neki megfelelő határozatlan $\int \frac{\sin x}{x} dx$ integrál nem fejezhető ki a **DERIVE** által ismert függvényekkel. Nézzük meg mit tesz ilyen esetben a **DERIVE**.

💻 Írjuk be a $\frac{\sin x}{x}$-et, majd kattintsunk az **Integrál meghatározása** gombra ∫, hogy generáljuk és egyszerűsítsük a $\int \frac{\sin x}{x} dx$-et.

#45: $\frac{\mathrm{SIN}(x)}{x}$

#46: $\int_3^4 \frac{\mathrm{SIN}(x)}{x}\, dx$

#47: $\int_3^4 \frac{\mathrm{SIN}(x)}{x}\, dx$

Az imént említett okból eredően a **DERIVE** nem tudja tovább egyszerűsíteni pontos számítás esetén. Ezért kapjuk eredményként ugyanazt a kifejezést.

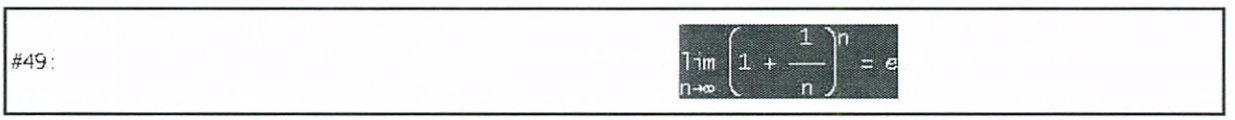
Ugyanakkor a határozott integrált ki tudjuk számítani numerikusan kiértékelés üzemmódban.

Számítsuk ki a $\int_3^4 \frac{\sin x}{x}\,dx$ -et kiértékelve a #47 kifejezést.

A **DERIVE** a Simpson féle törvény adaptált verzióját használja.

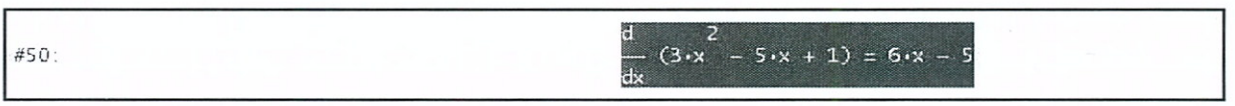
A parancssor [lim], [∂], vagy [∫] gombja, illetve az **Analízis > Határérték**, **Analízis > Differenciál** és az **Analízis > Integrálás** utasítások helyett használhatjuk a **LIM**, **DIF** vagy az INT függvényeket is. Ugyanazt a műveletet hajtják végre, mint a nekik megfelelő gomb vagy parancs. Minden kiegészítő információt, amelyre a **DERIVE**-nak szüksége van a gombok vagy parancsok esetén, a függvények argumentumaként meg kell adnunk (differenciál változó, differenciálás sorrendje stb.) Nézzük meg a következő példákat.

Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ -t beírva a következőt: *lim((1+1/n)^n,n,inf)=*



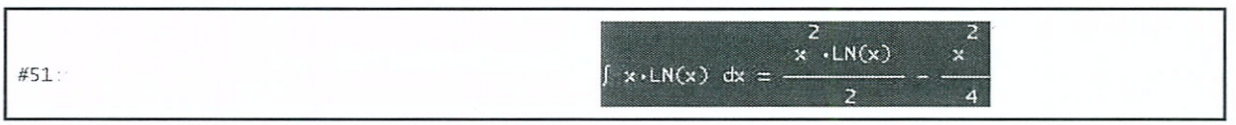
A határérték iránya tetszőleges negyedik tényező. Alapértelmezésben mindkét oldalú határértéket számít.

Számítsuk ki $f(x)=3x^2-5x+1$ első deriváltját. Írjuk be*: dif(3x^2-5x+1,x)=*



A differenciálás rendjét egy harmadik argumentumban adhatnánk meg. Alapértelmezésben az első derivált szerepel.

Számítsuk ki $\int x\ln x\,dx$ -et. Írjuk be: *int(xlnx,x)=*

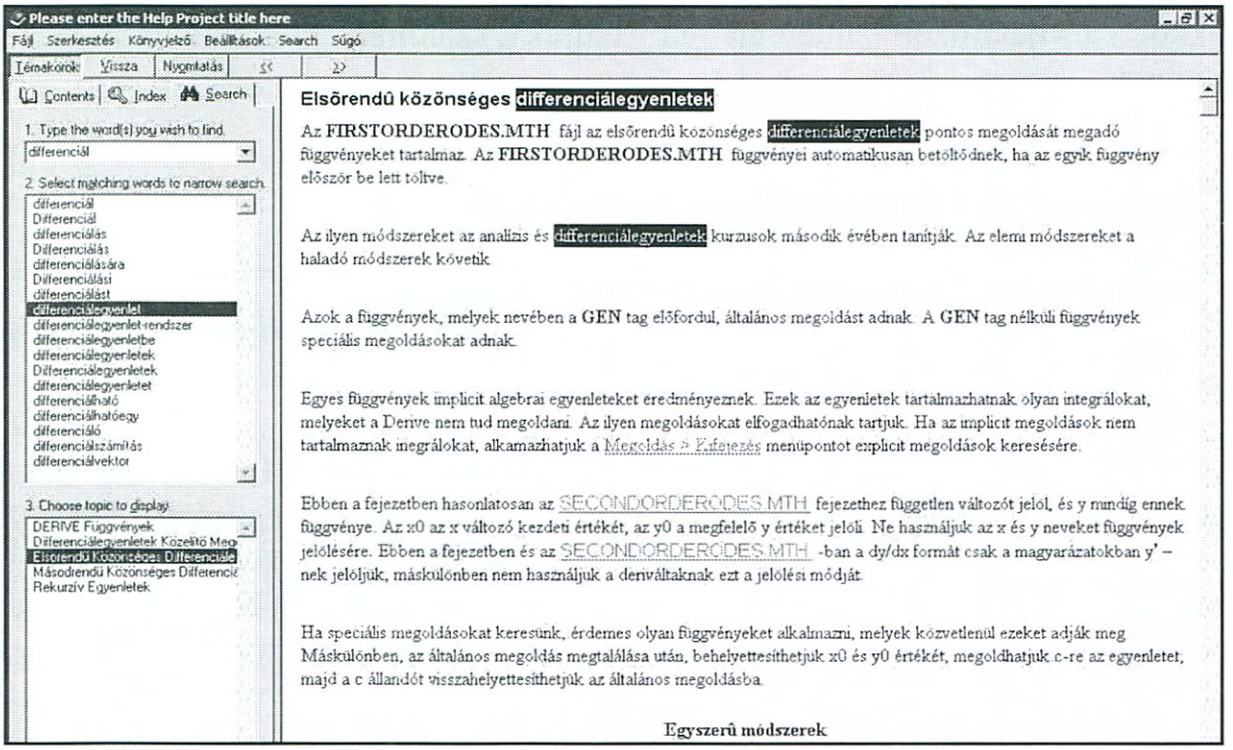


Az integrálás állandó tetszőlegesen megadható harmadik argumentum. Ha megadunk egy harmadik és egy negyedik argumentumot is, az a határozott integrál alsó és felső határaként kerül értelmezésre.

Zárjuk ezt a fejezetet az $y'=by-ay^2$ differenciálegyenlet megoldásával, ahol y x-nek egy függvénye. Nincs se gomb se parancs a differenciál egyenletek megoldására.

Tanácsért hívjuk segítségül az online súgót.

Keressük a *Differenciál* kulcsszót a súgóban, ...



Válasszuk ki az *Elsőrendű Közönséges Differenciálegyenletek* leírását.

Egyszerû módszerek

DSOLVE1_GEN(p, q, x, y, c) az általános megoldását adja a következő formának

$$p(x, y) + q(x, y)\cdot y' = 0$$

A megoldásban lesz egy c szimbólikus állandó. A legtöbb elsőrendû differenciálegyenlet visszavezethetõ a fenti formára.

Ebben a leírásban láthatjuk a **DSOLVE1_GEN** függvényt. Ennek értelmében át kell írnunk az iménti differenciálegyenletünket, hogy megfeleljen a $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$ formulának, mert a függvény behívásakor argumentumként szükségünk lesz a *p(x, y)*-ra és *q(x, y)*-ra. Átírva a függvényt $(ay^2 - by) + y' = 0$ formában, a $p(x, y) = ay^2$-et és *q(x, y)=1*-et kapjuk.

💻 Másoljuk be a **DSOLVE1_GEN**(p,q,x,y,c) sablont a beviteli sorba és *p* helyére írjunk *a y^2 - b y*-t és *q* helyére *1*-et.

```
#52: DSOLVE1_GEN(a·y^2 - b·y, 1, x, y, c)
```

💻 Oldjuk meg a differenciál egyenletet a #52 egyszerűsítésével.

```
#53:   LN((a·y - b)/y)/b + x = c
```

Transzformáljuk ezt az implicit megoldást explicit megoldássá úgy, hogy a #53 kifejezést *y*-ra tekintettel oldjuk meg.

#54: $\text{SOLVE}\left(\frac{\text{LN}\left(\frac{a \cdot y - b}{y}\right)}{b} + x = c,\ y\right)$

#55: $y = \frac{b \cdot x}{\frac{b \cdot x}{a \cdot e} - \frac{b \cdot c}{e}}$

a és b az eredeti probléma paraméterei, c az integrál állandó. Vizsgáljuk meg a kérdést, ha a=5/4 és b=1/2.

Adjuk meg a paraméterek értékét: *a:=5/4 és b:=1/2*

#56: $a := \frac{5}{4}$

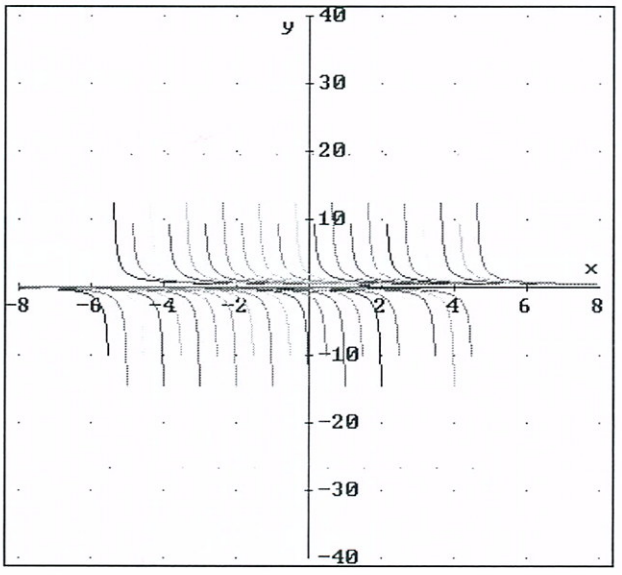
#57: $b := \frac{1}{2}$

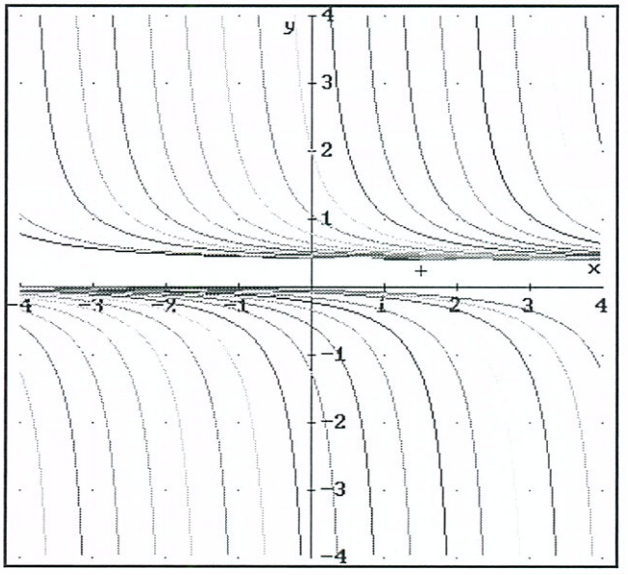
A **DSOLVE1_GEN** függvényt használva egy általános megoldásra jutottunk, amely a görbék egy olyan családját adja, ahol a paraméter a c integrálási állandó. Alkalmazzuk az **Analízis > Vektor** utasítást hogy a és b jelenlegi értékei mellett olyan görbéket generáljunk ahol c -5-től 5-ig terjed és a lépés ½.

Generáljuk a megfelelő vektor kifejezést: Jelöljük ki a #55-t és indítsuk az **Analízis > Vektor** utasítást. A **Változó** mezőbe írjunk c-t és legyen az értelmezési tartomány -5 és 5 között ½-es lépésközzel. Lépjünk ki a párbeszédablakból az OK-val, hogy elkerüljük az egyszerűsítést.

#58: $\text{VECTOR}\left(y = \frac{\frac{b \cdot x}{b \cdot e}}{\frac{b \cdot x}{a \cdot e} - \frac{b \cdot c}{e}},\ c,\ -5,\ 5,\ \frac{1}{2}\right)$

Rajzoljuk meg a #58-ban leírt görbéket, miután töröltünk minden előző ábrát (bal oldali kép). Állítsuk vissza $-4 \le x \le 4$ és $-4 \le y \le 4$ méretű képet a **Beállítások > Ábrázolási tartomány** indításával. Kattintsunk a TÖRLÉS gombra, majd lépjünk ki at OK-val.

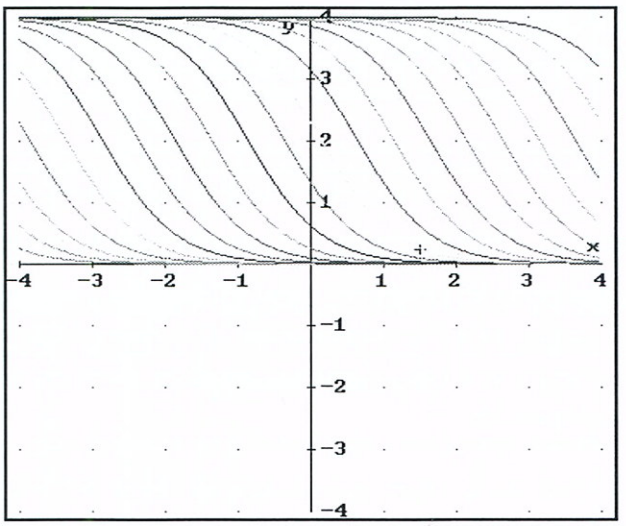




Ezek az ábrák az $y' = by - ay^2$ differenciál egyenlet néhány megoldását illusztrálják. Könnyen kipróbálhatunk más értékeket a-ra vagy b-re.

💻 Szerkesszük át a #56 és #57 kifejezést a következőképpen: *a:=-1/2 és b:=-2*

💻 Töröljük a korábbi ábrákat és ábrázoljuk a #58 kifejezést.



💻 Lépjünk ki a **DERIVE**-ból mentés nélkül.

Összefoglalás

Algebra ablak

lim vagy **Analízis > Határérték** ..... kijelölt kifejezés határértékének meghatározása

: Változó ..... változó kiválasztása

: Megadott pont ..... határérték megadása

: Irány ..... határérték irányának kiválasztása

∂ vagy **Analízis > Differenciálás** ..... kijelölt kifejezés deriváltjának meghatározása

: Változó ..... változó kiválasztása

: Rend ..... rend értékének megadása

∫ vagy **Analízis > Integrálás** ..... kijelölt kifejezés integráljának meghatározása

: Változó ..... változó kiválasztása

: Integrál ..... integrál típusának megadása (**Határozott** vagy **Határozatlan**)

: Határozott integrál ..... integrál felső és alsó határának megadása

: Határozatlan integrál ..... integrál konstans megadása

Analízis > Vektor ..... vektor létrehozása a kijelölt kifejezésből

: Változó ..... változó kiválasztása

: Kezdőérték ..... kezdőérték megadása

: Végérték ..... végérték megadása

: Lépésköz ..... lépésköz megadása

Függvények

PLOTINT ..... függvény határozott integráljának ábrázolása

DIF ..... differenciálás (**Analízis > Differenciálás**)

DSOLVE1_GEN ..... a p(x,y)+q(x,y)y'=0 c-től függő általános megoldása

INT ..... integrálás (**Analízis > Integrálás**)

LIM ..... határérték kiszámítása (**Analízis > Határérték**)

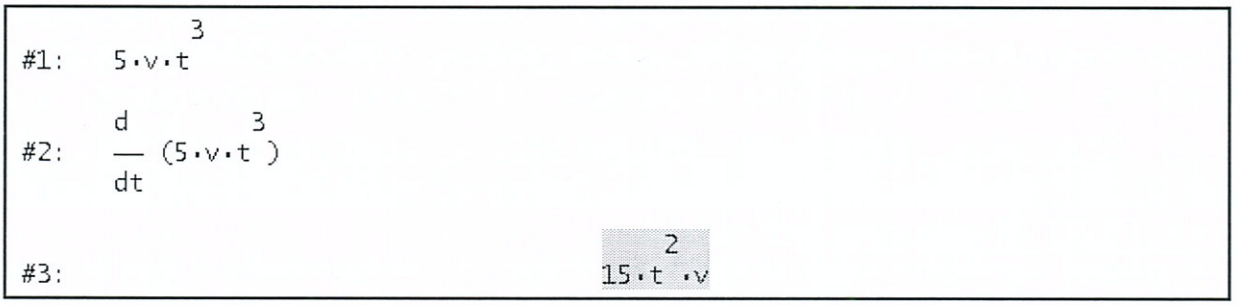
TANGENT ..... y(x) –hez húzott érintő az $x=x_0$-ban

13. Fejezet:

Egyszerűsítési lépések megjelenítése

Egy előző fejezetben áttekintett integrálás és differenciálás után nézzük meg, hogy a **DERIVE** hogyan számol. Eddig a **DERIVE** mintegy fekete dobozként funkcionált, mely egy adott kérdésre megadta a választ (az esetek többségében) – de nem tudtuk, hogyan jut el az eredményhez- Ebben a fejezetben a lépésenkénti megjelenítés funkcióról lesz szó. Ez a funkció nagyon hasznos lehet a gyakorlatban a tanárok és diákok számára.

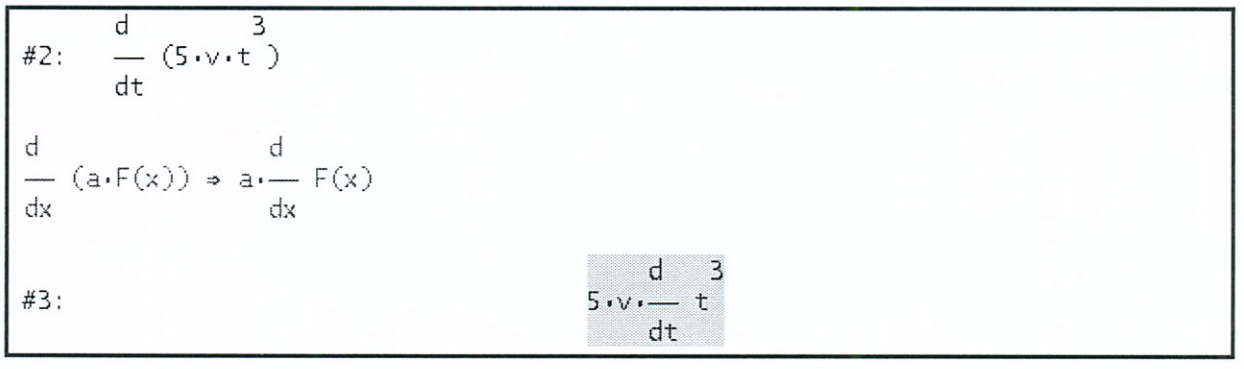
💻 **DERIVE** indítása. Vigyük be, majd differenciáljuk a *t: 5v t^3* függvényt.



Ha a számítási folyamatból csak az eredményre van szüksége, ez a megoldás. De ha Ön tanítja, tanulja a matematikát vagy matematikai kutatásokat folytat, akkor tudni akarja, hogy hogyan született meg az eredmény. (A 8. fejezetben említettekhez kapcsolódik)

A **DERIVE** 6 rendelkezik egy olyan funkcióval, amely megmutatja az egyszerűsítések lépéseit és megmutatja a program által használt transzformációs szabályokat. Ez a lépésenkénti megjelenítés funkció.

💻 Töröljük a #3 kifejezést, a #2 legyen kijelölve, majd nyomjuk meg a **Lépésenkénti megjelenítés** gombot (vagy **Egyszerűsítés > Lépésenkénti megjelenítés** menüpont).



A **DERIVE** az egyszerűsítés egy lépését mutatja meg és egy szövegdobozban, kék betűszínnel megjelenik a transzformációs szabály (A **Beállítások > Elrejtés > Szövegek** menüpontban beállítható ezek elrejtése).

💻 Nyomjuk meg kétszer a **Lépésenkénti megjelenítés** gombot.

```
                                        d   3
#3:                                  5·v·— t
                                        dt

d   n      n - 1
— x  ⇒ n·x
dx

                                           2
#4:                                  5·v·3·t

                                           2
#5:                                  15·v·t
```

A lépésenkénti megjelenítés további fejlesztések alatt álló project. Mintegy 2,000 transzformációs szabály van beépítve a **DERIVE 6** verzióba, lefedve a differenciálás, integrálás, összeadás, szorzás, az egyszerűsítés alap és speciális funkcióit, az egyenlőségek és egyenlőtlenségek egyszerűsítését. Néhány probléma megoldása során a közbenső lépések nem mindig lesznek megjelenítve, a fenti példában a #4 és #5 kifejezés között nincs transzformációs szabály. A jövőben fejlesztjük a beépített transzformációs szabályok számát. A folyamatos fejlesztések eredményének ingyenes letöltéséhez látogassa rendszeresen a **http://www.DERIVE.com**, **http://www.DERIVE-europe.com**, vagy **http://www.DERIVE-asia.com** web oldalakat.

A Lépésenkénti megjelenítés nagyon hasznos funkció a matematika tanítása és tanulása során. A lépésenkénti megjelenítés a következő esetekben és célokra használható:

(1) A felhasználó tudni akarja, hogy a **DERIVE** hogyan egyszerűsítette a kifejezést, vagyis bele akar nézni a Fekete dobozba.
(2) A felhasználó meg akarja tanulni az egyszerűsítés finomságait.
(3) A tanuló megfigyelések alapján szeretne tanulni és tanulmányoz egy "szakértőt" az általa megválasztott példa megoldása során.
(4) A tanuló jobban megérti a lépéseket, ha látja a "szakértő" által tett lépéseket és látja a szakértő által használt szabályokat.

Úgy látjuk, hogy a számítógépes algebrai rendszerek (pl. **DERIVE**) fő célja a matematika tanítása a kézi számítások csökkentésével. A **DERIVE** a számítások automatizálásával támogatja ezt a célt.

A 8. fejezet elején láthattuk, hogy a **DERIVE** az $e^{i\pi}$ kifejezés eredményeként -1-et adott. Nézzük meg, hogyan találta meg a **DERIVE** ezt a megoldást.

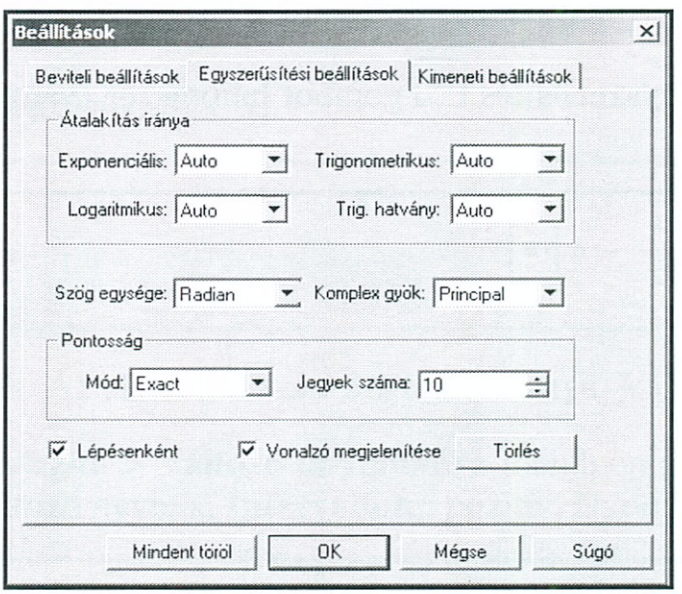
Írjuk be: $e^{i\pi}$, majd lépésenként egyszerűsítsük a kifejezést úgy, hogy a lépésenkénti megjelenítés gombot addig ismételjük megnyomni, míg az egyszerűsített kifejezés nem változik.

```
        i·π
#6:    e

 y·i
e    ⇒ COS(y) + i·SIN(y)

#7:                              COS(π) + i·SIN(π)

COS(π) ⇒ -1

#8:                                -1 + i·SIN(π)

SIN(π) ⇒ 0

#9:                                      -1

#10:                                     -1
```

A képernyőn látható eredmények egyértelműek. Az eredmény kiszámolásának magyarázatához tehát a LÉPÉSENKÉNTI MEGJELENÍTÉS gomb használható vagy a **STEP** parancs.

Ezen funkció úgy is alkalmazható, ha beállítjuk, hogy az egyszerűsítések mindig jelenjenek meg lépésenként.

💻 A **Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások** menüpontban a **Lépésenként** melletti négyzetet pipáljuk ki a bal alsó sarokban.

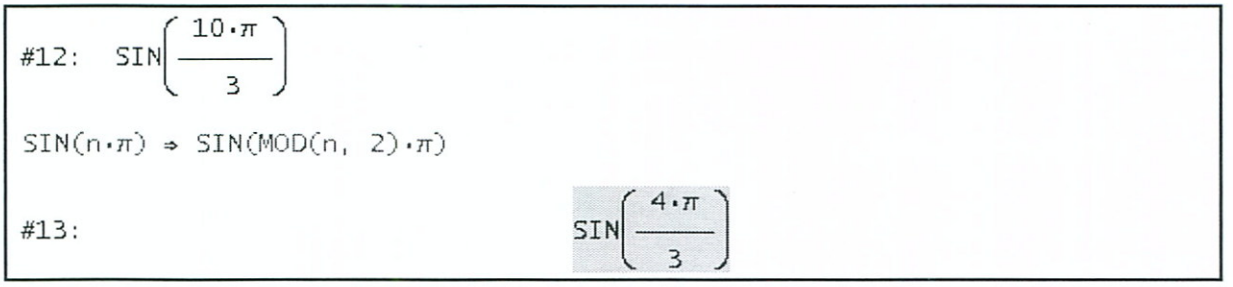


💻 Nyomjuk meg az OK gombot.

```
#11:  DisplaySteps := true
```

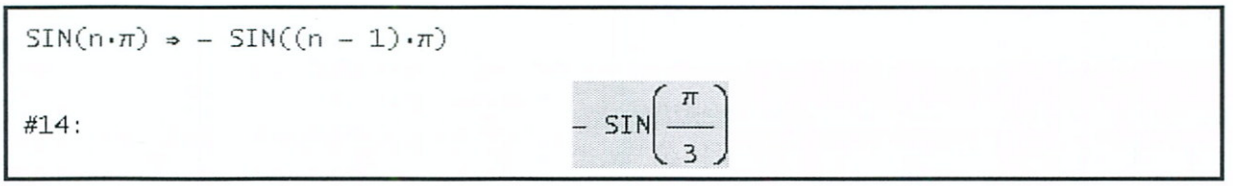
Ebben az esetben minden egyszerűsítés lépésenkénti megjelenítés módban fog működni.

💻 Írjuk be: $\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)$, majd nyomjuk meg az egyszerűsítés gombot.



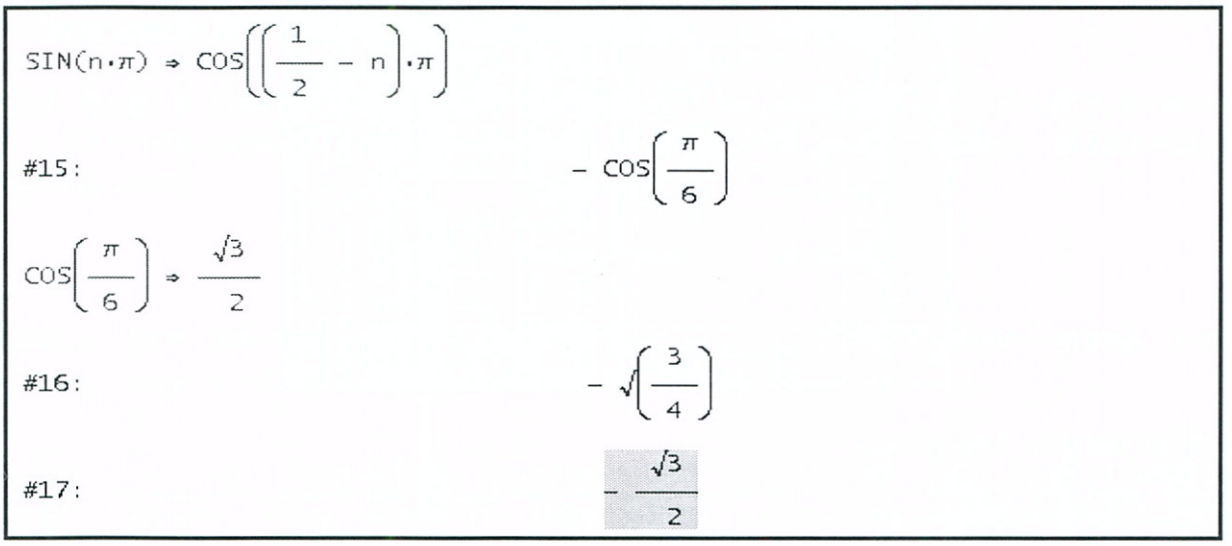
A SIN függvény értéke nem változik, ha 2π -t hozzáadunk vagy kivonunk. Általánosan ezt úgy írjuk, hogy sin(x+2π)=sin(x). Hogy elérjük a legkisebb pozitív argumentumot, a 2π -t mindaddig vonjuk le, amíg az argumentum pozitív marad. Ha az argumentum negatív, akkor addig ismétlünk 2π-t hozzáadni, míg az pozitív nem lesz. A fent látható $\sin(n\cdot\pi)\Rightarrow\sin(\mathrm{mod}(n,2)\cdot\pi)$ kifejezés ennek a matematikai leírása. A fenti példában: $\mathrm{mod}(10/3,2)=10/3-2=10/3-6/3=4/3$

Használjuk az **Egyszerűsítés > Egyszerűsítés** menüpontot.



Ennek a módnak az a hátránya, hogy nincs lehetősége gyorsan változtatni az egyszerűsítés és a lépésenkénti megjelenítés között. Bármely egyszerűsítési funkció választása esetén végig kell menni az egyszerűsítési lépéseken.

Nyomjuk meg az **Eegyszerűsítés** gombot háromszor (vagy amíg az eredmény már nem változik tovább).



A #16 és #17 lépések között volt változás, de nincs transzformációs szabály kiírva. Mint azt korábban említettük, ez azért van mert még nem teljes a **DERIVE**-ba beépített szabályok száma. Újabb információkért látogassa rendszeresen a **DERIVE** honlapokat.

Amikor a lépésenkénti egyszerűsítés mód be van kapcsolva, akkor minden "indirekt" egyszerűsítés (pl. **Egyszerűsítés** menüpont) csak az első egyszerűsítési lépést fogja végrehajtani.

Írjuk be: $x^2 \sin(x)$, nyomjuk meg az **Integrál meghatározása** gombot, majd a megjelenő dialógus ablakon nyomjuk meg az EGYSZERŰSÍTÉS gombot.

```
#18:  x^2·SIN(x)

#19:  ∫ x^2·SIN(x) dx

∫ x^n·SIN(a·x) dx = - x^n·COS(a·x)/a + n/a·∫ x^(n - 1)·COS(a·x) dx

#20:  2·∫ x·COS(x) dx - x^2·COS(x)
```

Ez nem a végső megoldás. Hiszen a #20 kifejezés még mindig tartalmazza az integrálást. Az eredményhez még kétszer meg kell nyomnia az Egyszerűsítés gombot. Kapcsoljuk ki a Lépésenkénti megjelenítés funkciót.

A **Beállítások > Beállítások** menüpont kiválasztása után a megjelenő dialógus ablakon kattintsunk a **Lépésenként** melletti pipára (ekkor az eltűnik). Nyomjuk meg az OK gombot.

```
#21:  DisplaySteps := false
```

Érdekes példa az $\ln(x^n)$ egyszerűsítése. Kezdjük az $n = 3$ esettel:

Gépeljük be és egyszerűsítsük: *ln(x^3)*

```
#22:  LN(x^3)

#23:  LN(x^3)
```

Nem történt egyszerűsítés. Az ok az x változó értéktartománya. Változtassuk meg:

Válasszuk a **Képlet készítő > Változó tartománya** menüpontot. A megjelenő dialógus ablakban állítsuk be: **Változó neve**: x, **Intervallum**: pozitív. Nyomjuk meg az OK gombot.

```
#24:  x ∈ Real (0, ∞)

If x>=0,

LN(x^n) = n·LN(x)

#25:  3·LN(x)
```

Az egyszerűsítési szabály megjelenítéséhez kapcsoljuk vissza a lépésenkénti megjelenítés funkciót. Láthatjuk, hogy a szabály csak nem negatív x értékekre alkalmazható.

Mi történik, ha x negatív:

Definiáljuk x-et negatívnak, használva a **Képlet készítő > Változó tartománya** menüpontot. Majd lépésenként egyszerűsítsük kétszer.

#26: x ∈ Real (−∞, 0)

If x<0,

LN(x) → LN(−x) + π·i

#27: $LN(-x^3) + \pi \cdot i$

If x<0 and n is odd,

$LN(-x^n) \rightarrow n \cdot LN(-x)$

#28: $3 \cdot LN(-x) + \pi \cdot i$

Az eredmény természetesen függ x hatványától. A #27 kifejezés (szabály) mutatja, hogy az eredmény (#28) x<0 és páratlan kitevő esetén ennyi. Nézzük, mi történik páros kitevő, pl. 2 esetén.

💻 Írjuk be és egyszerűsítsük: ln(x^2) (Emlékezzünk: *x* még mindig negatív!)

#29: $LN(x^2)$

If x<0 and n is even,

$LN(x^n) \rightarrow n \cdot LN(-x)$

#30: $2 \cdot LN(-x)$

Próbáljuk meg általános módon megadni a páros és páratlan kitevőt:

💻 Írjuk be és egyszerűsítsük: $ln(x^{2n})$

#31: $LN(x^{2 \cdot n})$

#32: $2 \cdot n \cdot LN(-x) + i \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot FLOOR\left(\frac{1}{2} - n\right) + 2 \cdot \pi \cdot n\right)$

A floor funkció megjelenése arra utal, hogy a **DERIVE** nem egész számként kezeli az n-et.

💻 Definiáljuk n-et egész számnak (**Képlet készítő > Változó tartománya**), majd egyszerűsítsük a kifejezést (#31) újra.

#33: n ∈ Integer

#34: $2 \cdot n \cdot LN(-x)$

Ha be van kapcsolva a lépésenkénti egyszerűsítési mód, akkor nyomon követhetjük, hogy milyen egyszerűsítési lépéseken keresztül jutott a **DERIVE** a megoldásig.

$z^w \Rightarrow e^{w \cdot LN(z)}$

#35: $LN(e^{2 \cdot n \cdot LN(x)})$

If x<0,

$LN(x) \Rightarrow LN(-x) + \pi \cdot i$

#36: $LN(e^{2 \cdot n \cdot (LN(-x) + \pi \cdot i)})$

$e^{x + y \cdot i} \Rightarrow e^x \cdot (COS(y) + i \cdot SIN(y))$

#37: $LN(e^{2 \cdot n \cdot LN(-x)} \cdot (COS(2 \cdot \pi \cdot n) + i \cdot SIN(2 \cdot \pi \cdot n)))$

If n is even,

$COS(n \cdot \pi) \Rightarrow 1$

#38: $LN(e^{2 \cdot n \cdot LN(-x)} \cdot (1 + i \cdot SIN(2 \cdot \pi \cdot n)))$

If n is an integer,

$SIN(n \cdot \pi) \Rightarrow 0$

#39: $LN(e^{2 \cdot n \cdot LN(-x)})$

$LN(e^x) \Rightarrow x$

#40: $2 \cdot n \cdot LN(-x)$

Nézzük a páratlan kitevőket. Írjuk be és egyszerűsítsük: $ln(x^{2n+1})$

#41: $LN(x^{2 \cdot n + 1})$

#42: $(2 \cdot n + 1) \cdot LN(-x) + \pi \cdot i$

Írjuk be és egyszerűsítsük: $\int sin(x)\ cos(x)\ dx$

#43: $\int SIN(x) \cdot COS(x)\ dx$

$\int F(x)^n \cdot F'(x)\ dx \Rightarrow \frac{F(x)^{n+1}}{n+1}$

#44: $\frac{SIN(x)^2}{2}$

Egy jó példa a deriválás szabályainak megtanulására: *x sin(3x)-½ cos(3x)*

Írjuk be: : *x sin(3x)-½ cos(3x)*, majd nyomjuk meg a **Derivált meghatározása** gombot ∂. Nyomjuk meg az OK gombot.

#45: $x \cdot SIN(3 \cdot x) - \frac{1}{2} \cdot COS(3 \cdot x)$

#46: $\frac{d}{dx}\left(x \cdot SIN(3 \cdot x) - \frac{1}{2} \cdot COS(3 \cdot x)\right)$

Lépésenkénti megjelenítés funkció bekapcsolásával:

Egyszerűsítsük a kifejezést (#45) …

$$\frac{d}{dx}(F(x) + G(x)) \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(x)$$

#47: $\frac{d}{dx}\left(-\frac{COS(3 \cdot x)}{2}\right) + \frac{d}{dx}(x \cdot SIN(3 \cdot x))$

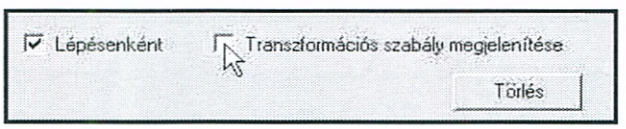
11 lépés után megkapjuk a megoldást:

… **Egyszerűsítés, Egyszerűsítés, Egyszerűsítés** … (11-szer).

#58: $3 \cdot x \cdot COS(3 \cdot x) + \frac{5 \cdot SIN(3 \cdot x)}{2}$

A lépések elemzésével megtanulhatjuk, hogy "kézzel" hogyan kell egyszerűsíteni a kifejezést.

A **Beállítások > Beállítások** menüpontnál kapcsoljuk ki a transzformációs szabály megjelenítése funkciót.



Deriváljuk az $x^2 \cdot \sin(x)$ -et:

Írjuk be: *x^2 sin(x)*. Nyomjuk meg a **Derivált meghatározása** gombot, majd a megjelenő dialógus ablakon az OK gombot.

#59: $x^2 \cdot SIN(x)$

#60: $\frac{d}{dx}(x^2 \cdot SIN(x))$

#61: $x^2 \cdot \frac{d}{dx} SIN(x) + SIN(x) \cdot \frac{d}{dx} x^2$

A kérdés: "*Milyen transzformációs szabályt alkalmazott a **DERIVE**?*"

Egyszerűsítsük.

#61: $x^2 \cdot \frac{d}{dx} SIN(x) + SIN(x) \cdot \frac{d}{dx} x^2$

#62: $x^2 \cdot COS(x) + SIN(x) \cdot \frac{d}{dx} x^2$

A kérdés: "*Milyen transzformációs szabályt alkalmazott a **DERIVE**?*"

Egyszerűsítsük újra.

#63: $x^2 \cdot COS(x) + SIN(x) \cdot 2 \cdot x$

#64: $x^2 \cdot COS(x) + 2 \cdot x \cdot SIN(x)$

Amennyiben a Transzformációs szabály megjelenítése funkció be van kapcsolva, az alkalmazott szabályok megjelenítését szabályozhatjuk a **Beállítások > Elrejtés > Szövegek** menüpont alatt is, hiszen a szabályokat a **DERIVE** szövegdobozokban írja ki.

Lássuk az integrálást:

Írjuk be: $4x^5-5x^2+12$, majd nyomjuk meg az **Integrál meghatározása** gombot. Nyomjuk meg az OK gombot, majd az **Egyszerűsítés**t.

#65: $4 \cdot x^5 - 5 \cdot x^2 + 12$

#66: $\int (4 \cdot x^5 - 5 \cdot x^2 + 12)\, dx$

#67: $\int 4 \cdot x^5\, dx + \int (12 - 5 \cdot x^2)\, dx$

Egyszerűsítsük lépésenként, míg az integrál jel eltűnik az eredményből.

#68: $\frac{2 \cdot x^6}{3} + \int (12 - 5 \cdot x^2)\, dx$

#69: $\frac{2 \cdot x^6}{3} + \int -5 \cdot x^2\, dx + \int 12\, dx$

#70: $\frac{2 \cdot x^6}{3} - \frac{5 \cdot x^3}{3} + \int 12\, dx$

#71: $\frac{2 \cdot x^6}{3} - \frac{5 \cdot x^3}{3} + 12 \cdot x$

Kapcsoljuk vissza a **Transzformációs szabály megjelenítése** funkciót.

A lépésenkénti megjelenítéssel beleláthatunk az egyszerűsítés mögötti **DERIVE** mechanizmusba:

💻 Írjuk be és lépésenként egyszerűsítsük: *ln(2x)*

```
#72:  LN(2·x)

If x<0,

LN(x) ⇒ LN(-x) + π·i

#73:                                LN(- 2·x) + π·i
```

Nem ezt az eredményt akartuk elérni. Azonban ez emlékeztet minket arra, hogy az x változóra még mindig él a korábban beállított értéktartomány.

💻 Állítsuk át x tartományát valósra, majd egyszerűsítsük újra a #72 kifejezést.

```
#74:  x :∈ Real

#75:  LN(2·x)

If x>0,

LN(x·z) ⇒ LN(x) + LN(z)

#76:                                LN(x) + LN(2)

#77:                                  LN(2·x)
```

A DERIVE két fázisban egyszerűsíti a kifejezéseket: 1. csökkentő fázis 2. összevonó fázis. A csökkentő fázis a kifejezést ln(x)+ln(2) alakra hozza, majd az összevonó fázis visszaalakítja – a tömörebb – ln(2x) alakra. Az eredményből úgy látszik, mintha semmi nem történt volna, pedig a lépésenkénti transzformációból látszik, hogy két transzformáció is történt. Az ok, amiért az első transzformáció alkalmazásra került az, hogy más példa esetén ((ln(2x)–ln(x)) ez az alak további egyszerűsítésekre és összevonásokra ad lehetőséget.

💻 Lépjünk ki a **DERIVE**-ból az algebra ablak mentése nélkül.

Összefoglalás

Algebra ablak

Egyszerűsítés > Lépésenkénti megjelenítés ..... egyszerűsítés egy lépése

Beállítások > Elrejtés > Szövegek ..... szövegdobozok elrejtésének ki/bekapcsolása

Beállítások > Beállítások

: Lépésenként..... lépésenkénti egyszerűsítés

: Transzformációs szabály megjelenítése ..... alkalmazott szabály megjelenítése

14. fejezet

Még néhány szó az ábrázolásról

A **DERIVE** ábrázolási lehetőségei széleskörű lehetőségeket kínál a megjelenítéshez. Ebben a fejezetben további alkalmazási lehetőségeket látunk és megnézünk néhányat a korlátai közül is.

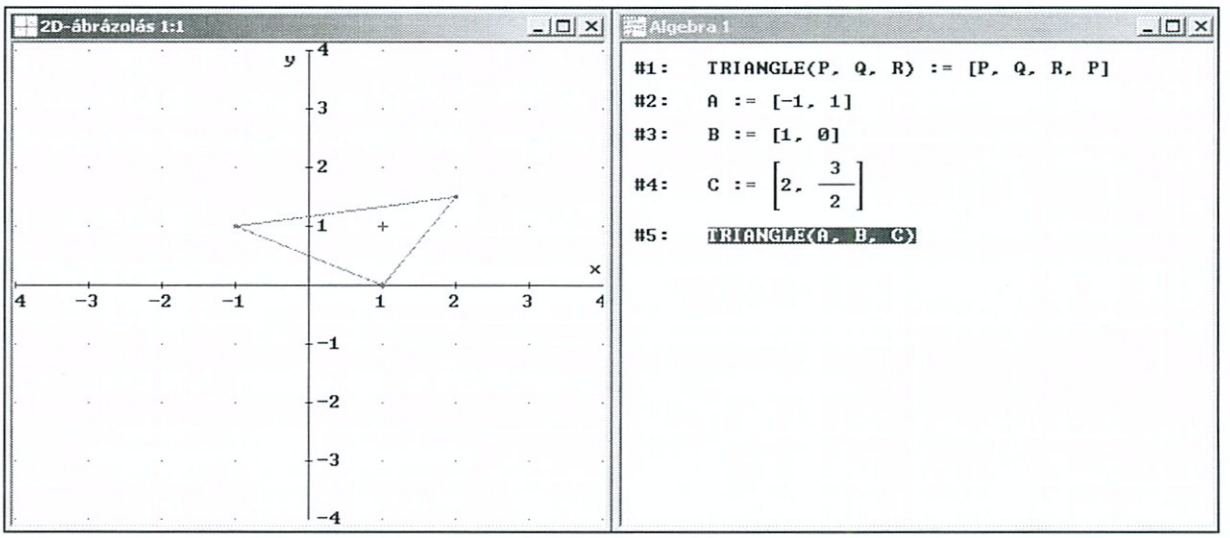
Kezdjük a **TRIANGLE** függvénnyel, amelyről a 11. fejezetben már volt szó.

💻 Indítsuk a **DERIVE**-ot eredeti beállításokkal. Definiáljuk a TRIANGLE függvényt, beírva a következőt: *TRIANGLE(P,Q,R):=[P,Q,R,P]*

```
#1:   TRIANGLE(P, Q, R) := [P, Q, R, P]
```

Rajzoljuk meg az *ABC* háromszöget, ahol *A*(-1, 1), *B*(1, 0) és *C*(2, 3/2).

💻 Kezdjük azzal, hogy nyitunk egy 2D-ábrázolás ablakot, a két ablakot egymás mellé helyezzük és a pontok összekötése üzemmódot bekapcsoljuk. Írjuk be a három pontot az algebra ablakba és vigyük be az ábrát.: *triangle(a,b,c)*



Forgassuk el a háromszöget. Ahhoz, hogy az egész alakzatot forgatni tudjunk, először tudnunk kell egy csúcsát forgatni. Algebrailag egy pontot úgy tudunk α szöggel elforgatni az origó körül, hogy a pont vektorkoordinátáját szorozzuk a $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ forgatási mátrixszal. Használjuk ezt a módszert a **ROTATE** függvény definiálásához, amellyel kiszámíthatjuk az elforgatott pont koordinátáit.

💻 Írjuk be a forgatási mátrixot: $[\cos\alpha, -\sin\alpha; \sin\alpha, \cos\alpha]$

```
#6:   [ COS(α)   - SIN(α) ]
      [ SIN(α)    COS(α)  ]
```

💻 Definiáljuk a ROTATE függvényt: *ROTATE(P,α):=#6*

#7: ROTATE(P, α) := $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ · P

Próbáljuk ki az új függvényt, az *A* csúcsot forgassuk el $\pi / 6$-tal.

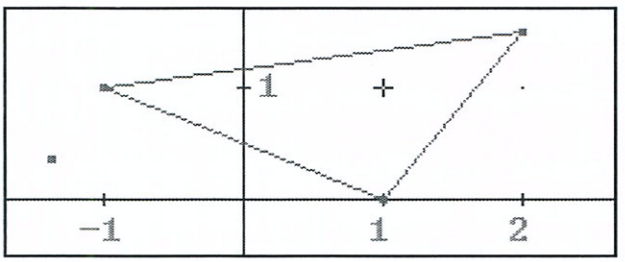
💻 Írjuk be, egyszerűsítsük, majd értékeljük ki: *rotate(A,pi/6)*

#8: ROTATE$\left(A, \frac{\pi}{6}\right)$

#9: $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right]$

#10: [-1.366025403, 0.3660254037]

💻 Ábrázoljuk az elforgatott pontot a #10-el.



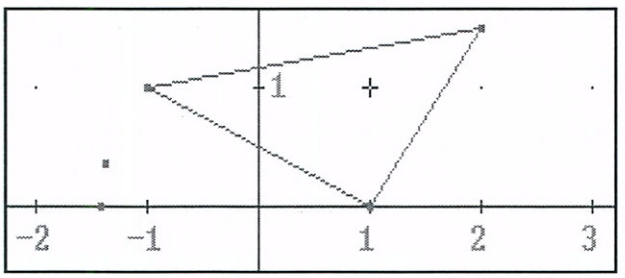
Próbáljuk ki a függvényt úgy is, hogy fokokban adjuk meg a szöget.

💻 Írjuk be, egyszerűsítsük, majd értékeljük ki: *rotate(A,45°)*

#11: ROTATE(A, 45°)

#12: [−√2, 0]

💻 Rajzoljuk be az új pontot.



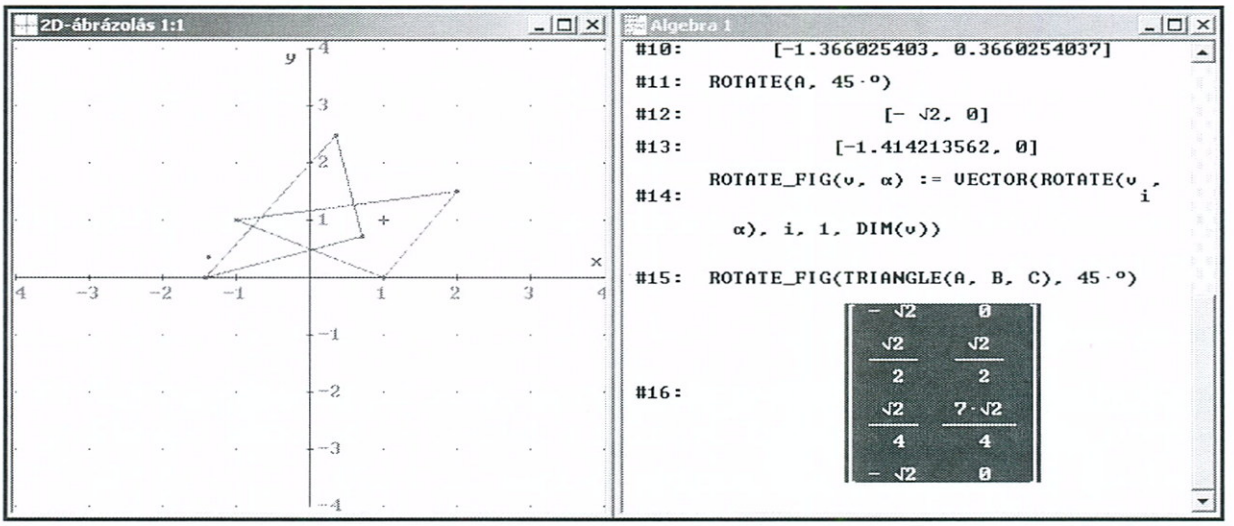
Most a pont forgatására használt **ROTATION** függvényből építenünk kell egy *v* idomot forgató függvényt. Ugyanúgy, mint a háromszögnél, az idomot a csúcsainak vektoraival adjuk meg. A ROTATE_FIG definiálandó függvény a **ROTATE** függvényt használja, hogy az idom minden egyes csúcsát (azaz azok vektorelemeit) α szöggel elforgassa. A **VECTOR** függvényt arra használjuk, hogy az elforgatott pontokat egy új idommá állítsa össze.

💻 Definiáljuk a ROTATE_FIG függvényt: *ROTATE_FIG(v,α):= vector(rotate(v↓i, α),i,1,dim(v))*

#13: ROTATE_FIG(v, α) := VECTOR(ROTATE(v$_i$, α), i, 1, DIM(v))

A $v\downarrow i$ az idom i-edik csúcsát jelöli. A vektorfüggvény behívásának első argumentuma, a *rotate(v↓i, α)* α-val forgatja el az i-edik csúcsot. Ugyanezt elvégzi a v vektor minden elemére, vagyis a gyakorlatban 1-től kezdve a v vektor elemszámáig minden i-t elforgat (a v dimenzióját a **DIM**(v) jelöli). Próbáljuk ki a függvényt, forgassuk el 45°-kal az origó körül az *ABC* háromszöget.

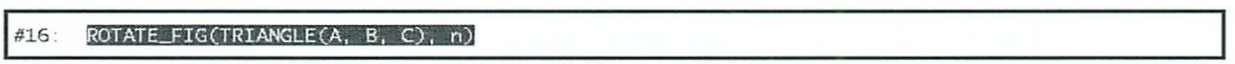
Írjuk be, egyszerűsítsük, majd ábrázoljuk: *rotate_fig(triangle(A,B,C),45°)*



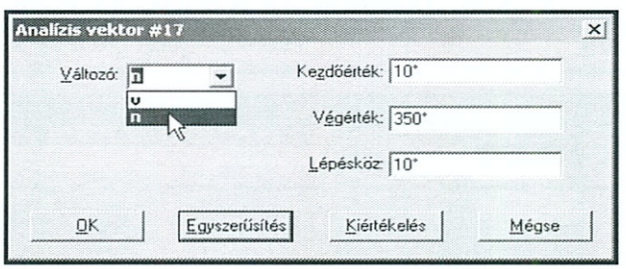
Nagyon szép ábrákat hozhatunk létre egy alakzat többszörös elforgatásával. Forgassuk el többszörösen az ABC háromszöget 10 fokonként 10°-tól 350°-ig. (Hogy ne írja felül az eredeti háromszöget, hagyjuk ki a 0°-ot és a 360°ot. A megfelelő alakzatok családjának generálására használjuk a **VECTOR** függvényt.

Az automata beillesztéssel illesszük be a #15 kifejezést a beviteli sorba ...

... és változtassuk a második argumentumát 45°-ról n-re.

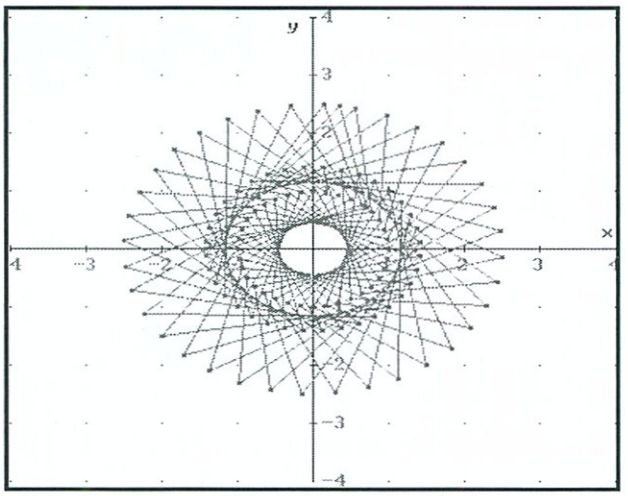


Az **Analízis > Vektor** utasítással generáljuk a háromszögeket. A **Változó** mezőbe írjunk n-t, legyen a **Kezdőérték** 10°, a **Végérték** 350°és a **Lépésköz** 10°.



Az OK-val lépjünk ki a párbeszédablakból, hogy elkerüljük az egyszerűsített és kiértékelt kifejezések megjelenítését.

Miután bekapcsoltuk a **Megjelenítési lehetőségek > Egyszerűsítés ábrázolás előtt** üzemmódot, rajzoljuk meg a #18-ban meghatározott háromszögeket.

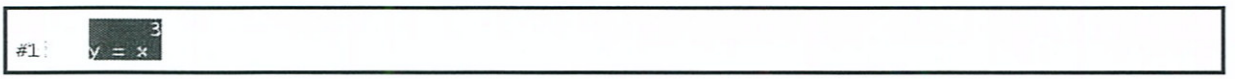


Figyeljük meg az ábra felső részén a szabálytalanságot. Az a korábban 45°-kal elforgatott háromszög miatt van.

Zárjuk be az algebra ablakot.

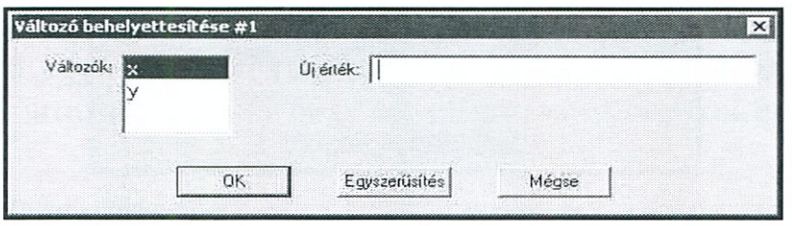
Tanulmányozzuk az $y=x^3$ függvényt úgy, hogy x és y szerepét felcseréljük.

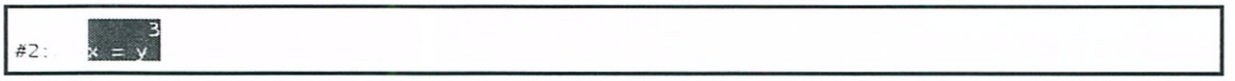
Nyissunk egy új munkalapot a gombbal és írjuk be: *y=x^3*



Itt y az x-nek egy függvénye. A kétváltozós kifejezéseket a **DERIVE** úgy fogja ábrázolni, hogy azt a változót veszi a vízszintes koordinátának, amelyik előbb következik a változók sorrendjében (itt tehát x-et). A másik lesz a függőleges koordináta (jelen estben az y). Derékszögű koordinátarendszer üzemmódban az y változó fordul elő a **Boolean** (logikai) kifejezésben, mindig feltételezzük, hogy a függőleges koordinátát jelzi. Ha az x fordul elő, feltételezzük, hogy a vízszintes koordinátát. Ha sem az x, sem az y nem fordul elő, az elsődleges változót rendeli hozzá a vízszintes koordinátához és a másikat a függőlegeshez. (Hasonlóképpen a polár koordináta-rendszerben a r-ről tesszük fel, hogy az origótól mért távolságot jelzi, míg a görög betűkről úgy gondoljuk, hogy az x tengely pozitív részétől az óramutatóval ellentétes irányban mért szöget jelentik. Ha sem az r, sem pedig a görög betű nem szerepel, az elsődleges változót rendeljük a szöghöz, és a másik változót a sugárirányú távolságnak.)

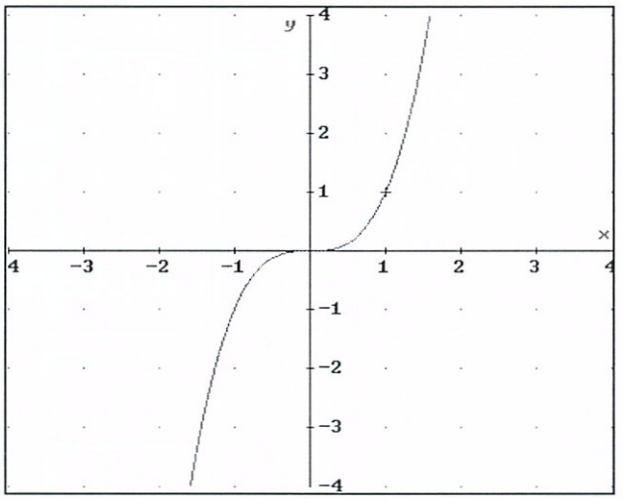
Cseréljük föl az x és y pozícióját. Használjuk a **Változó behelyettesítése** gombot, x új értéke legyen y és fordítva.

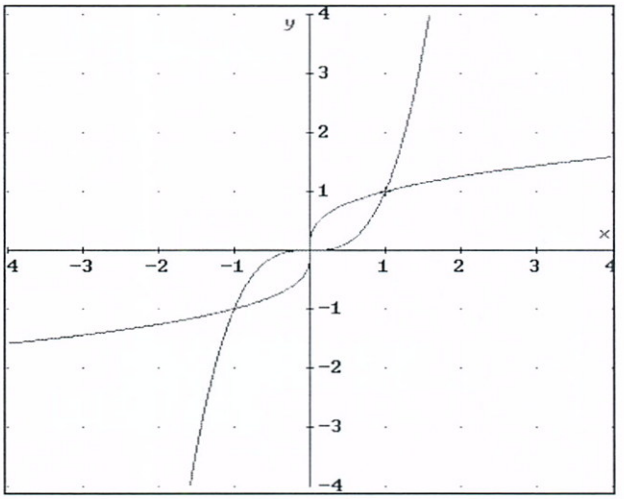




Ugyanakkor egy ilyen kifejezést, mint az $x = y^3$-t is tekinthetjük úgy, hogy x az y egy függvénye. Ebben az esetben viszont ezt függvényábraként meg tudjuk jeleníteni. (Valójában a **DERIVE** ezt az utat választja.) Ábrázoljuk mindkét függvény grafikonját.

Nyissuk a 2D-ábrázolás ablakot a szokásos módon. Helyezzük a két ablakot egymás mellé és ábrázoljuk először az $y = x^3$-t (#1 kifejezés, bal oldali kép), majd az $x = y^3$-t (#2 kifejezés).





Mivel a #2 függvény inverze a #1-nek, az egyik ábrát a 45°-os egyenesre (amely az $y = x$ egyenes grafikonja) tükrözve megkapjuk a másikat. Tanulmányozzuk még részletesebben az inverz függvényt.

Alakítsuk az $x = y^3$-öt y = g(x)-é. Oldjuk meg a #2 kifejezést y-ra, a gomb segítségével.

#3: SOLVE(x = y^3, y)

#4: $y = x^{1/3} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \vee y = x^{1/3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \vee y = x^{1/3}$

Ez három megoldást ad. Emeljük ki és alakítsuk ezeket három függvénnyé: y1, y2 és y3.

Definiáljuk az y1 függvényt. Jelöljük ki az első megoldást, ...

#4: $y = x^{1/3} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \vee y = x^{1/3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \vee y = x^{1/3}$

... az **F2**-vel tegyük a beviteli sort aktívvá és a kijelölt kifejezést másoljuk be az **F3**-mal.

y = x^(1/3)·(- 1/2 - √3·i/2)

A karaktersor bal oldalára írjuk az y helyett az $y1(x) :=$ kifejezést és zárjuk a ↵-vel.

#5: $y1(x) := x^{1/3} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right)$

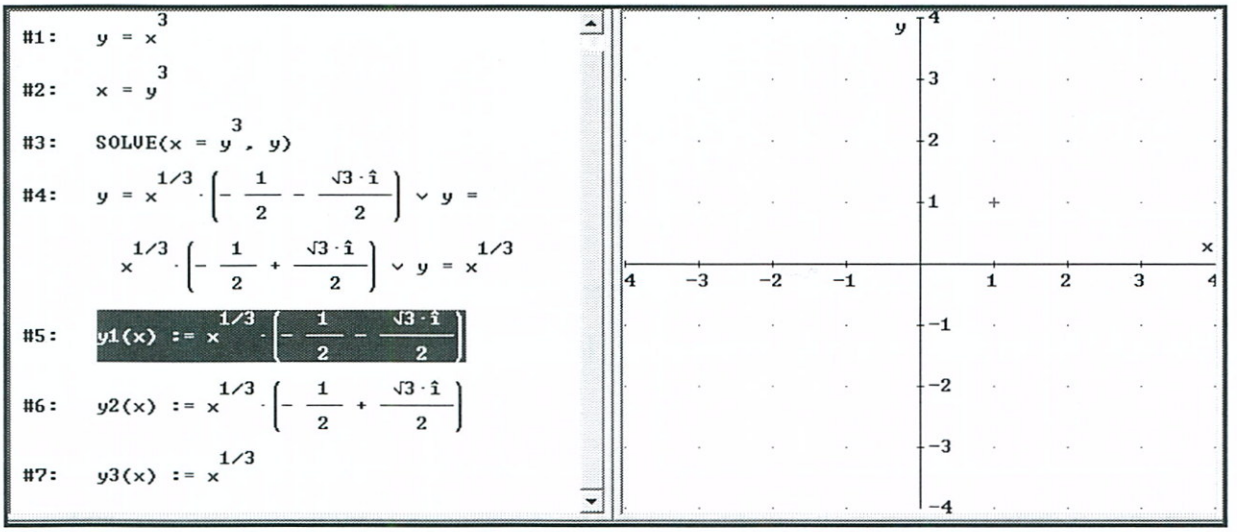
Ismételjük meg ezt az eljárást a második és harmadik megoldással is.

#6: $y2(x) := x^{1/3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right)$

#7: $y3(x) := x^{1/3}$

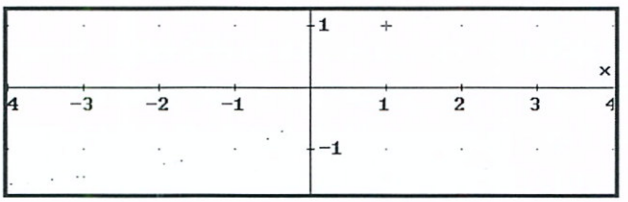
Ábrázoljuk a három függvényt, miután a két ablakot felcseréltük.

💻 Cseréljük fel a két ablakot úgy, hogy az algebra ablakot tesszük aktívvá és indítjuk az **Ablak > Egymás mellett** utasítást. Töröljük a korábbi ábrákat és ábrázoljuk y1-et (#5 kifejezés).



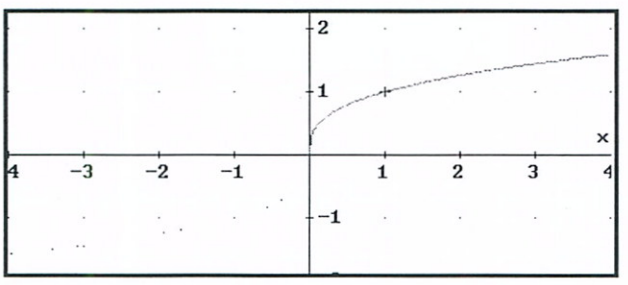
Nem látunk semmit. Megnézve a #5 kifejezést ez érthető lehet, hiszen y1 olyan függvénynek látszik, melynek függvényértéke nem valós.

💻 Ábrázoljuk y2-t (#6 kifejezés).



Az ábra néhány elkülönült pontból áll az x negatív értékeinél. Megvizsgálva a #6-et, az y2 is nem valós értékű függvénynek látszik. A néhány látható valós pont titokzatosnak tűnik.

💻 Rajzoljuk meg y3 ábráját (#7 kifejezés)



x pozitív értékeire kapunk egy görbét.

A három megoldást ábrázolva kevesebbet kapunk, mint az eredeti egyenletből kapott függvény ábrázolásakor. Hogy lehetséges ez? x negatív értékeinél a legtöbb pont hiányzik. Az y2 ábrájánál megjelenő néhány izolált pont úgy tűnik arra utal, hogy a megoldás ezen részét kell tovább tanulmányoznunk. Értékeljük y2-t néhány negatív számnál.

💻 Értékeljük *y2*-t -2-nél, -5/7-nél és $-\pi$ -nél. Írjuk be: *y2(-2)=, y2(-5/7)=, y2(-pi)=*

#8: $y2(-2) = -2^{1/3}$

#9: $y2\left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{245^{1/3}}{7}$

#10: $y2(-\pi) = -\pi^{1/3}$

Minden eredmény valós szám. Úgy tűnik, hogy y2-nek valós értékei vannak minden negatív argumentum esetén. Próbáljuk meg igazolni ezt.

Deklaráljuk *t*-t negatívnak a **Meghatározások > Változó tartománya** menüponttal, majd és értékeljük ki y2-t a $(-\infty, 0)$-ban.

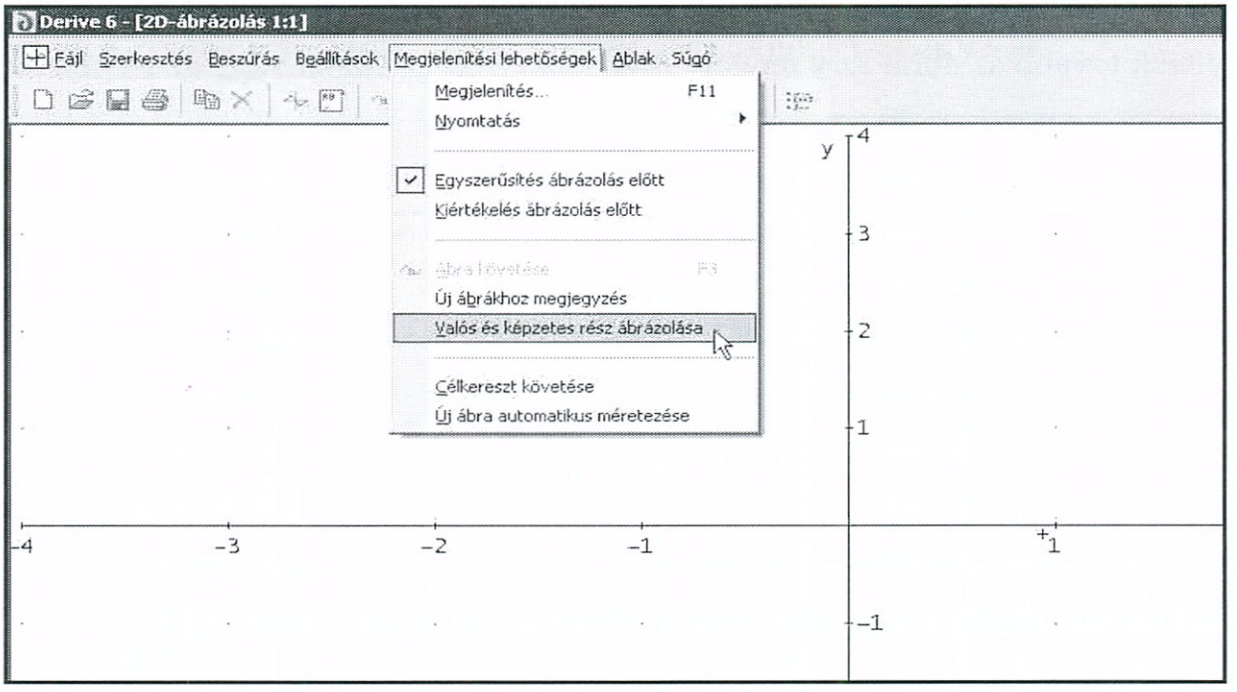
#11: $t : \text{Real}\ (-\infty, 0)$

#12: $y2(t) = -(-t)^{1/3}$

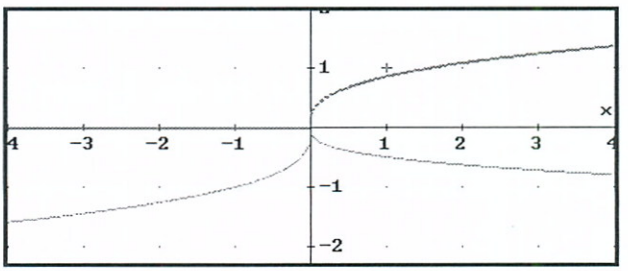
Az eredmény igazolja sejtésünket. Ha t negatív, -t pozitív. Egy pozitív szám köbgyöke ugyancsak egy pozitív szám. Negatív érték esetén y2-nek az értéke valós lesz.

Nézzük meg még egyszer az *y2* ábráját, ezúttal használjuk azt a lehetőséget, hogy egy komplex értékű függvénynek külön ábrázoljuk a valós és képzetes részét.

Kapcsoljuk be a komplex üzemmódot a **Megjelenítési lehetőségek > Valós és képzetes rész** ábrázolása utasítással.



Töröljük ez előző ábrákat és jelenítsük meg az y2-t.

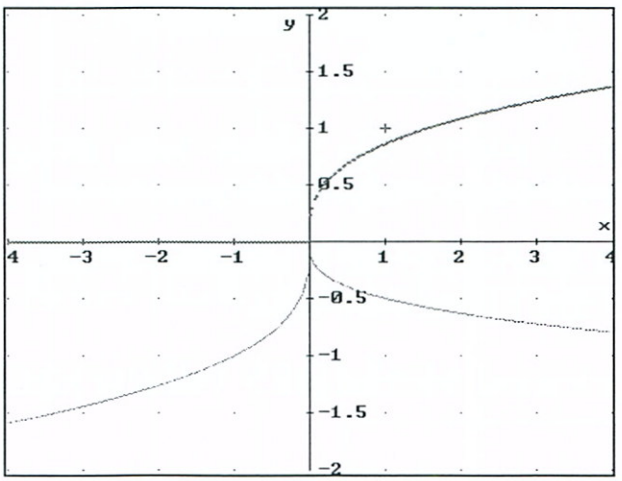


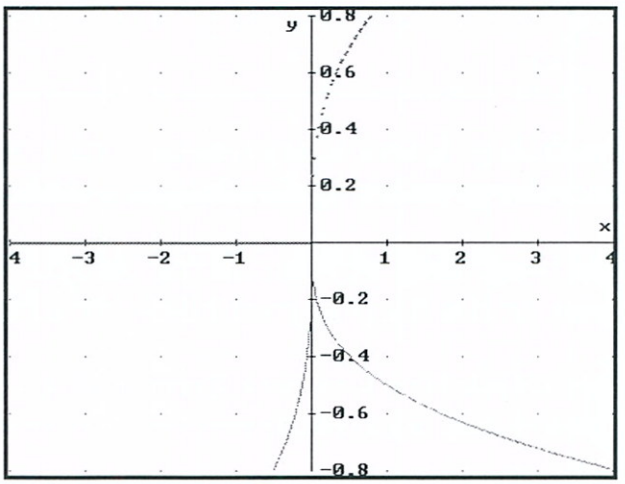
Egy komplex ábra két ágból tevődik össze. A vékonyabb görbe a valós rész ábrája, míg a vastagabb a képzetes részé. x>0-nál a y2(x) nyilvánvalóan nem valós. x<0-nál valósnak látszik, hiszen a képzetes ág az x tengelyen helyezkedik el, tehát nullának kellene lennie. Ez viszont ellent mond a korábban valós értékekre kapott ábrával.

A korábbi fejezetek figyelmeztettek már, hogy legyünk elővigyázatosak a kiértékeléssel. Mivel az ábrázolás a kiértékelésen alapszik, az ábrákat is elővigyázattal kell kezelnünk.

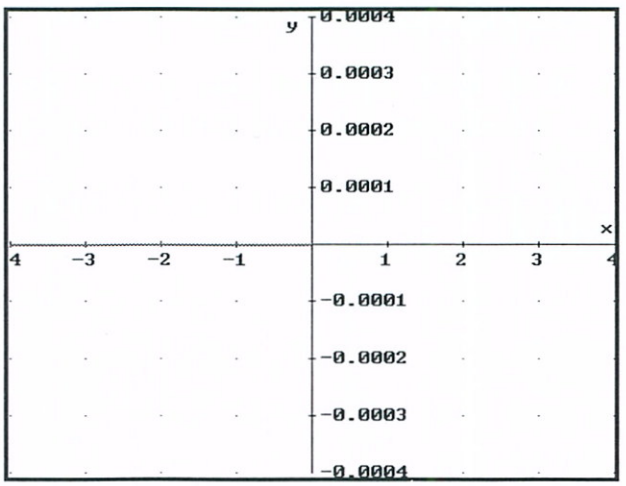
Tanulmányozzuk a képzetes ágat tovább megfelelően felnagyítva.

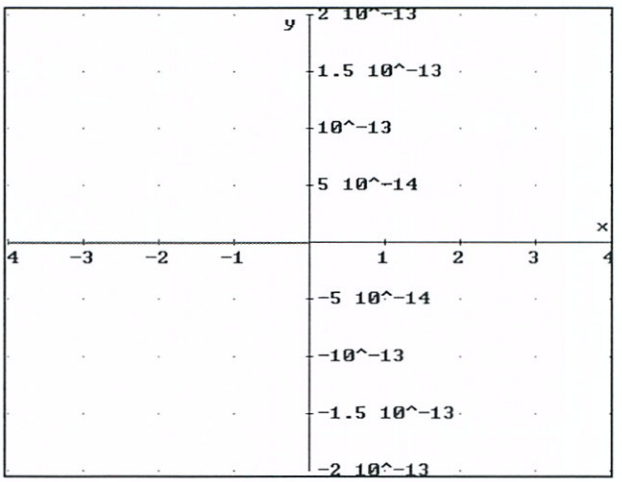
💻 Nagyítsuk az ábrát az y tengely irányában a **Közelítés függőlegesen** gomb segítségével (bal oldali kép) Kattintsunk a gombra (vagy az **F7** gyorsbillentyűjére) még egyszer.



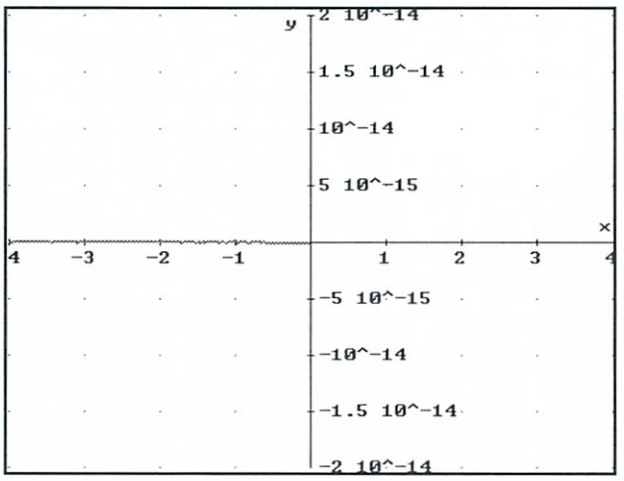


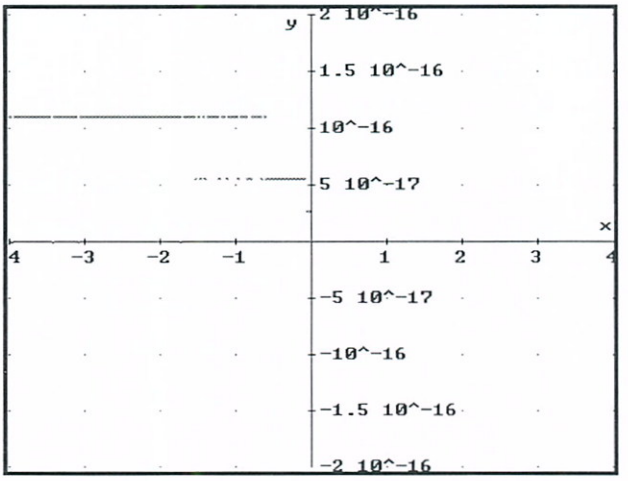
💻 Nagyítsuk tovább az ábrát az y tengely irányában a gombbal vagy az **F7**-tel.





💻 Folytassuk mindaddig a nagyítást, míg a következő jelenséget nem látjuk:





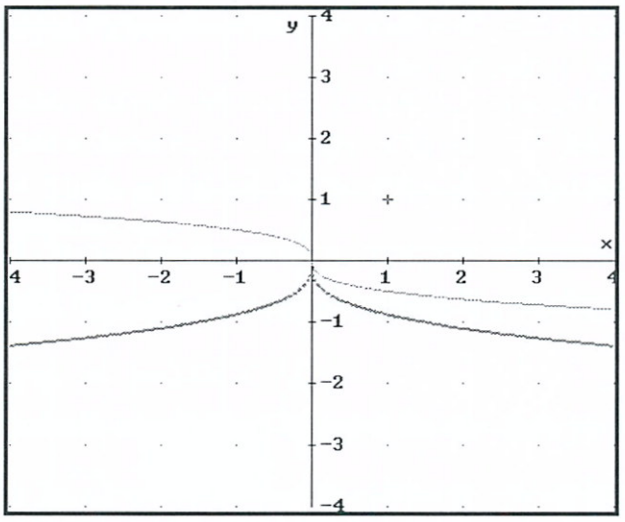
Amikor a lebegőpontos kiértékeléssel számítja ki a kifejezést a 2D-ábrázolás ablak, a 10^{-16}-on nagyságrendnél egy kis képzetes összetevő is belopódzik a kerekítéseknek köszönhetően. Mivel a 2D-ábrázolás csak akkor ábrázol olyan értékeket, melyeknek van képzetes része is, ha be van kapcsolva a **Valós és képzetes rész ábrázolása** kapcsoló, az y2 eredeti ábráján csak néhány különálló pont jelentkezett, ahol ez a hatás nem érvényesült. Újabb példát láthattunk arra, mit eredményezhet a lebegőpontos számítási módszer.

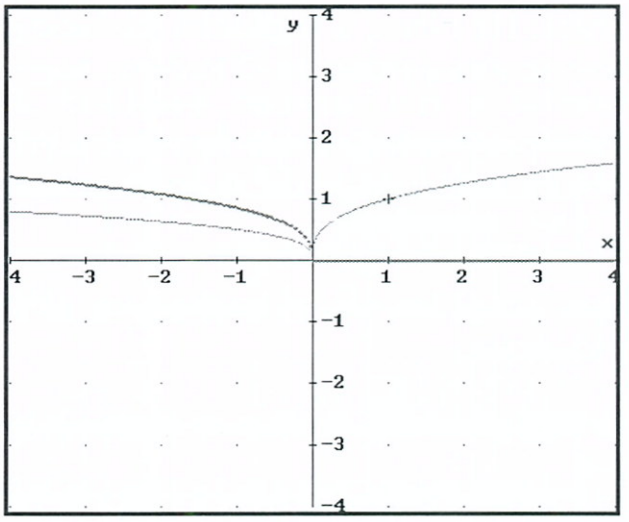
Állítsuk vissza az ábrázolás ablakot az eredeti $-4 \le x \le 4$ és $-4 \le y \le 4$ méretre.

Állítsuk vissza az ábrázolás ablak méretét a **Beállítások > Ábrázolási tartomány > Hosszúság/középpont** utasítással a TÖRLÉS gombra kattintva, majd az OK-val kilépve az ablakból. Töröljük az ábrát.

Még mindig a komplex ábrázolás üzemmódban ábrázoljuk y1-et és y3-at.

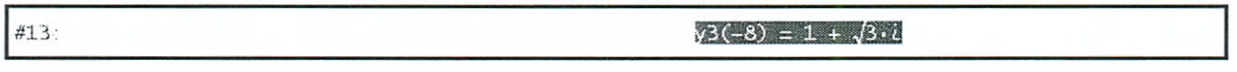
Rajzoljuk meg az y1 ábráját (bal oldali kép). Töröljük az ábrát és rajzoljuk meg az y3 ábráját.





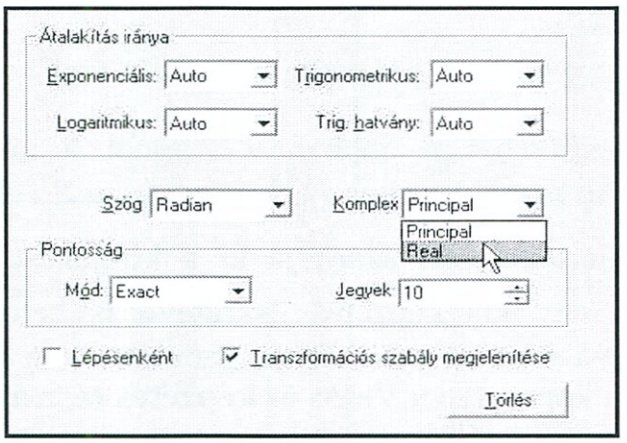
y1 értéke mindig nem valós, míg y3 értéke nem valós x negatív értékeire és valós x pozitív értékeire. Ez meglepőnek tűnhet, hiszen azt várnánk, hogy -8 köbgyöke -2.

Nézzük meg y3 értékét -8-nál. Írjuk be: *y3(-8)=*



A **DERIVE** eltérő választ ad, ami szintén igaz. (Ne felejtsük el, hogy három komplex szám van, amelynek a harmadik hatványa -8.) Nézzük meg azt a variációt, amelyet a **DERIVE** adott az **Egyszerűsítési beállítások** dialógusablakban.

💻 Indítsuk a **Beállítások > Beállítások: Egyszerűsítési beállítások** utasítást és a **Komplex gyök** mezőben válasszuk a **Real** (valós) értéket.



💻 Lépjünk ki az ablakból az OK-val.

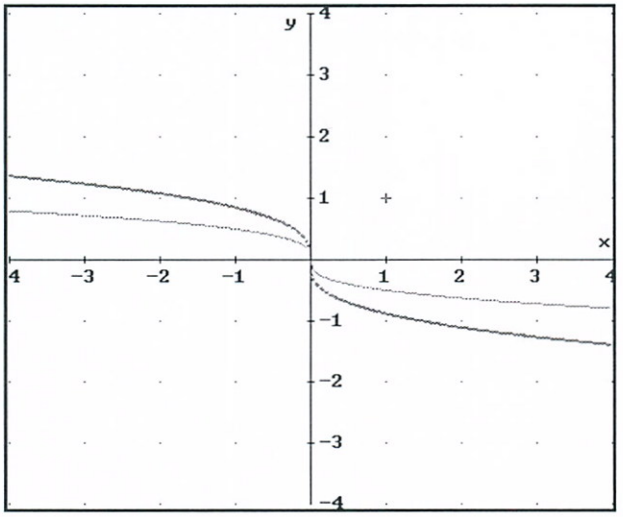
Az indokolja ezt a választást, hogy számos lehetőség áll rendelkezésre, hogy gyökfüggvény gyökét megkeressük. Ne felejtsük el az algebra alapvető elméletét, amely szerint minden *n*-edik hatványú egyenletnek *n* komplex megoldása van. Példaként: a 4 négyzetgyöke lehet 2 vagy -2, mert az alapvető $x^2 = 4$ másodfokú egyenletnek két megoldása van. Ebben az esetben nyilvánvalónak látszik a két megoldás, viszont nem ennyire nyilvánvaló a -8 köbgyöke esetében. Itt három megoldás van, úgy mint $1+\sqrt{3}\cdot i$, -2 és $1-\sqrt{3}\cdot i$. Az alapértelmezett **Főérték** mellett a **DERIVE** a gyökfüggvényeket úgy választja ki, hogy a legkisebb fázisszögűt keresi, ami jelen estben az $1+\sqrt{3}\cdot i$, lásd a #13-at. Az új, **Valós** beállítással a **DERIVE** a gyökfüggvényeket úgy alakítja ki, hogy valós gyököt választ, ha van ilyen. Ha nincs, a legkisebb fázisszöggel rendelkezőt választja. Következésképpen az y3(-8)-nak a megoldása itt -2 kellene, hogy legyen. Ellenőrizzük.

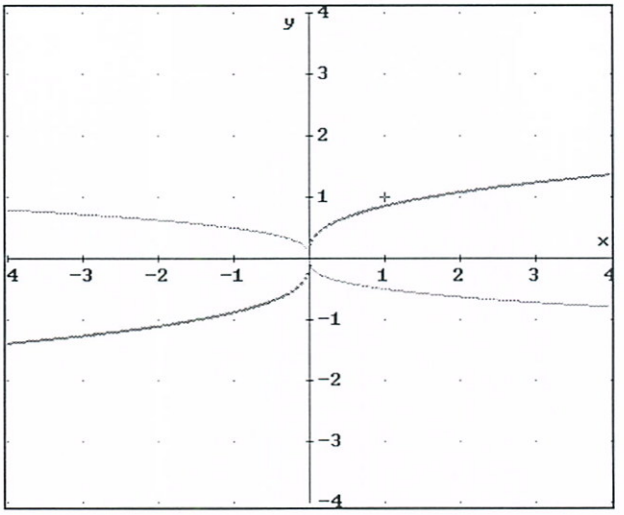
💻 Ellenőrizzük y3-at -8-nál. Írjuk be: *y3(-8)=*

```
#14: Branch := Real
```

Valóban annyi lett. Az új beállítással az y1, y2 és az y3 ábrája most másképpen kellene, hogy kinézzen.

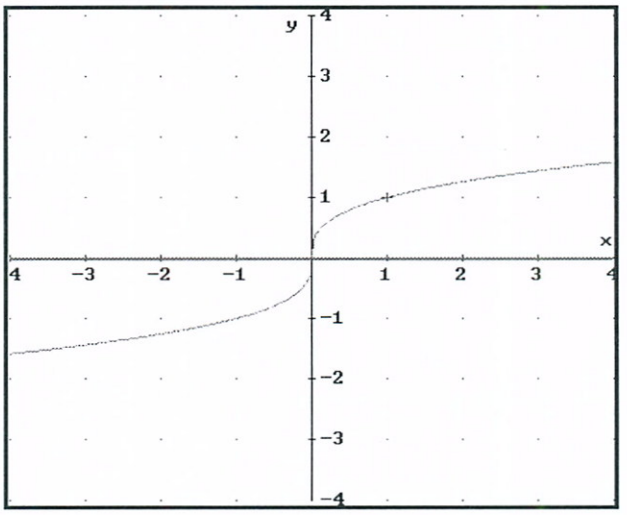
💻 Töröljük az előző ábrákat és ábrázoljuk az y1-et (bal oldali kép). Töröljük és ábrázoljuk az y2-t.





Mindkét ábra különböző. Különösen az y2-nek nincs valós gyöke többé.

Töröljük és ábrázoljuk y3-at.



y3 teljes tartományában valós lett.

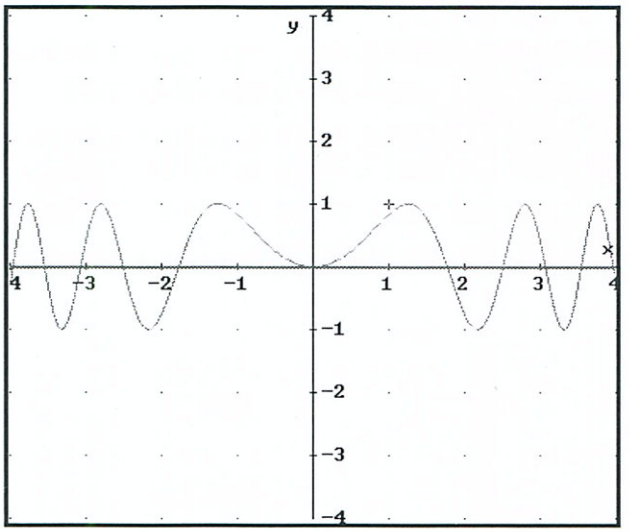
Nyilvánvalóan látszik, hogy a komplex gyök beállítása hatással van a kifejezések egyszerűsítésére. Az alapértelmezett **Főérték** több matematikai jellegzetességet őriz meg, míg a valós gyök alkalmasabb lehet egyszerűbb matematikai és bizonyos fizikai problémák megoldásában.

Nézzük meg az $y=sin(x^2)$-nek és inverzének ábráját.

Írjuk be: *y=sin(x^2)*

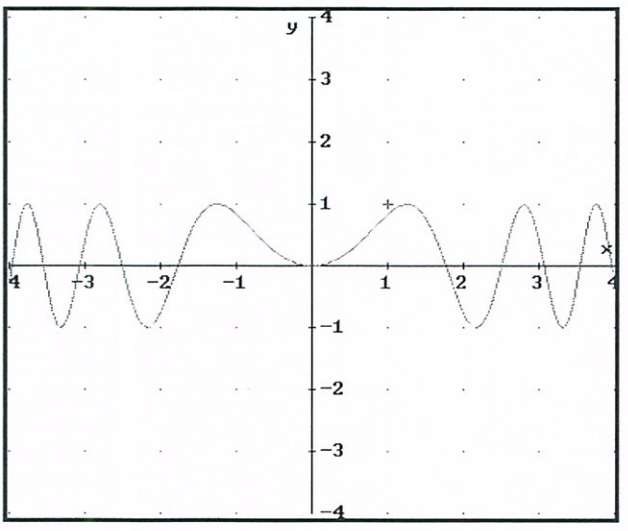
#15: $y = \sin(x^2)$

Töröljük az előző ábrákat és rajzoljuk meg a #16 kifejezésből kapott függvényt.



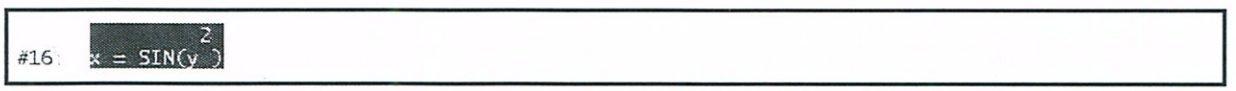
Az x tengely mentén még mindig látható a vastag vízszintes vonal. Ez annak a jele, hogy a komplex ábrázolási mód még mindig be van kapcsolva.

Kapcsoljuk ki a **Megjelenítési lehetőségek > Valós és képzetes rész ábrázolása** menüponttal a komplex ábrázolási módot. Töröljük az ábrát és jelenítsük meg az $y = \sin(x^2)$-et újra.



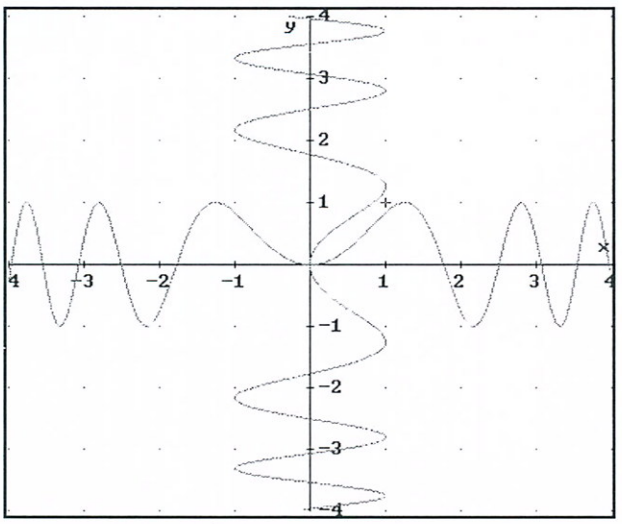
Határozzunk meg egy egyenletet, ami megadja az $y=\sin(x^2)$ függvény inverzét.

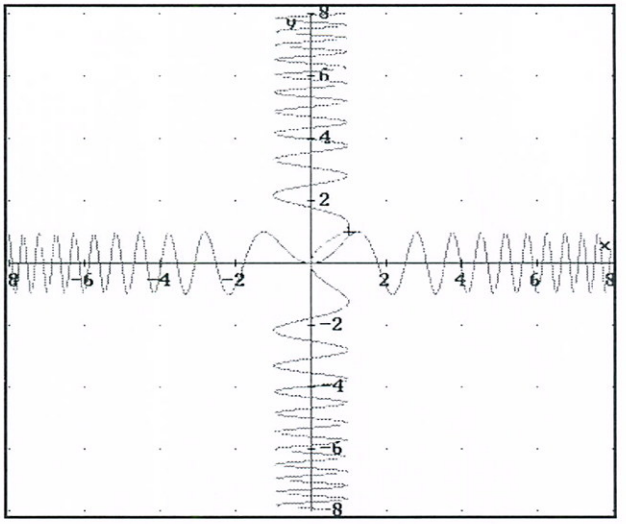
Az $y = \sin(x^2)$-ben cseréljük fel az x és az y pozícióját. Használjuk a **Változó behelyettesítése** gombot [SUB], hogy x értékét y-ra, y értékét x-re írjuk át.



Azt várhatjuk, hogy az $x=sin(y^2)$ az $y=sin(x^2)$ függvény inverze. Jegyezzük meg azonban, hogy az $y=sin(x^2)$ függvény, melyet az összes valós számra definiáltunk, csak abban a tartományban invertálható, amelyben teljes egészében növekszik, illetve teljes egészében csökken.

Rajzoljuk meg az $x=sin(y^2)$ ábráját (#17 kifejezés, bal oldali kép). Nyissuk a képet egyszer a [⇔] gombra kattintva.

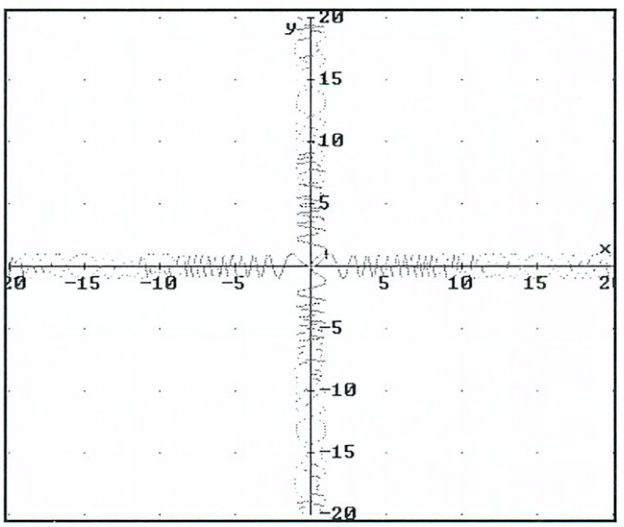




Az $x=sin(y^2)$ ábrája nem lehet az $y=g(x)$ függvény ábrája, mert a függvény értékei nem egyediek. Ebből következően az ábra nem lehet az $y=f(x)=sin(x^2)$ inverz függvénye, vagyis $y=f^{-1}(x)$, melynek az $x=sin(y^2)$ implicit reprezentánsa lenne. (Az $y=f^{-1}(x)$ függvény ábrája a fenti ábra csupán egy rövid szakaszát fedné. Lásd az előző megjegyzést.)

Ugyanakkor az $x=sin(y^2)$ ábrája egyezik az $x=h(y)$ függvény ábrájával. Így jeleníti meg a **DERIVE** a #17 kifejezést.

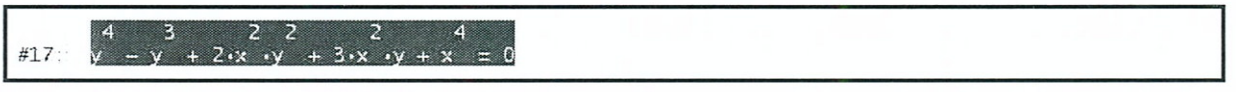
Nyissuk a képet újra a -val.



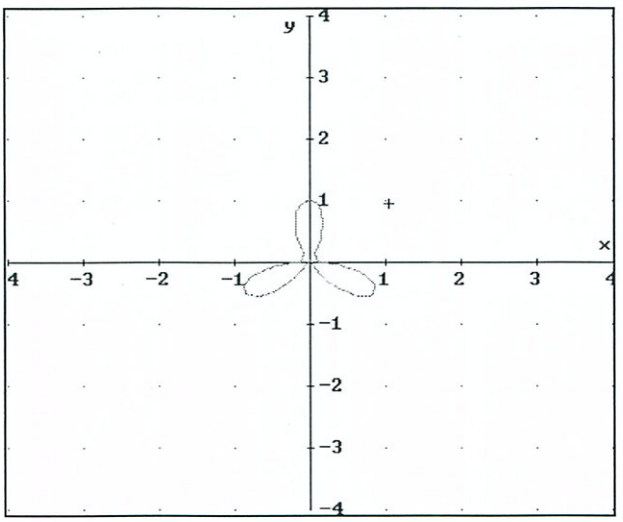
Ez a lépés furcsa hatással volt az ábrákra. Az ok az, hogy az adott függvénynek túl nagy az oszcillációja a négy tengelyvégen. Ez a függvényábrázolás korlátait jelzi.

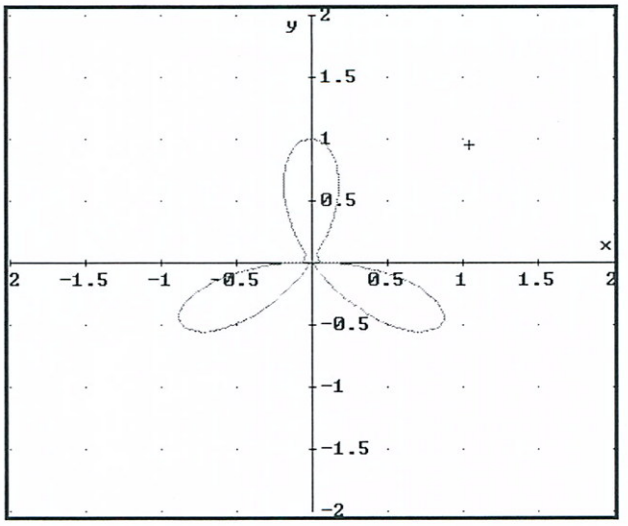
A következő példa az a görbe, mely implicite következik az $y^4 - y^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y + x^4 = 0$ egyenletből.

Írjuk be az egyenletet: *y^4–y^3+2x^2y^2+3x^2y+x^4=0*



Töröljük az előző ábrákat, állítsuk vissza az ábrázolási tartományt a **Beállítások > Ábrázolási tartomány** utasítással, majd ábrázoljuk a #18 egyenletet. Közelítsük a képet.





Az ábra nem jelenik meg pontosan az origó körül. Ez az implicit ábrázolás korlátait jelzi. (Emlékezzünk az implicit ábrázolás algoritmusára e szöveg korábbi részében.) Talán az explicit függvényábrázolás jobb ábrát produkálna. A #18 egyenletet megoldhatnánk *y*-ra, a mi számítógépünk 75,3 másodperc alatt megoldotta. Az eredmény viszont reménytelenül bonyolult és több oldalt tesz ki a képernyőn. Hasznos lehet időnként egy ilyen implicit formát polár formává alakítani, *x*-et *r cos t*-vel, *y*-t *r sin t*-vel helyettesítve.

💻 Alakítsuk a #18 egyenletet polár formává. Helyettesítsük *x*-et *r cos t*-vel, *y*-t *r sin t*-vel.

```
#19: (r·SIN(t))^4 - (r·SIN(t))^3 + 2·(r·COS(t))^2·(r·SIN(t))^2 + 3·(r·COS(t))^2·(r·SIN(t)) + (r·COS(t))^4 = 0
```

Polár koordinátarendszerben egy függvényábra formája: $r=f(t)$. Nézzük meg, hogy a **DERIVE** meg tudja-e oldani a #19 egyenletet *r*-re.

💻 A **Megoldás** gombot használva oldjuk meg a #19 egyenletet *r*-re.

```
#21: r = SIN(t)^3 - 3·SIN(t)·COS(t)^2 ∨ r = 0
```

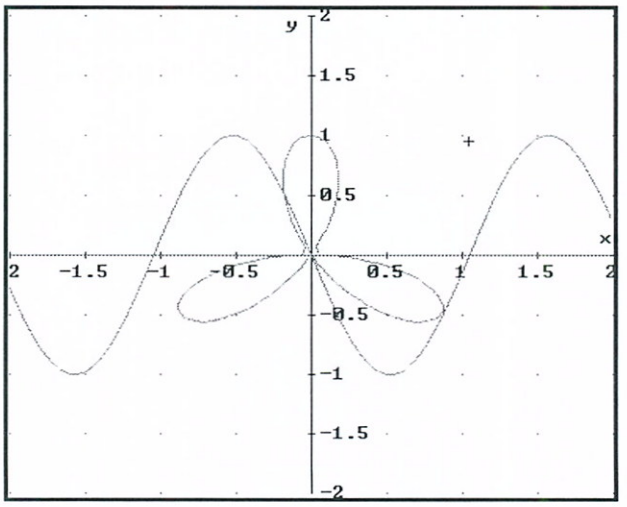
Ez már így is elég egyszerű. Viszont az **Egyszerűsítési beállítások** dialógusablakban megfelelő beállítást választva még egyszerűbbé tehetjük.

💻 Vonjuk össze a trigonometrikus kifejezéseket sokszögekké a **Beállítások > Beállítások: Egyszerűsítési beállítások** utasítás behívásával. A **Trigonometrikus** mezőben válasszuk a **Összevonás (Collect)** beállítást.

```
#22: Trigonometry := Collect
#23: r = -SIN(3·t) ∨ r = 0
```

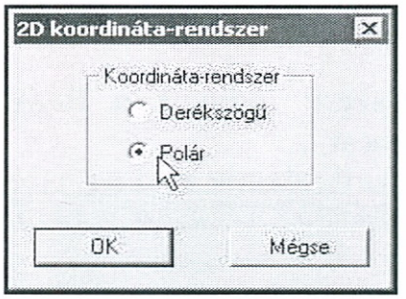
A **DERIVE** lehetővé teszi, hogy a #23-ban látható diszjunkciókat grafikusan megjelenítsük.

💻 Rajzoljuk meg a #23 kifejezés alapján a pontsort.

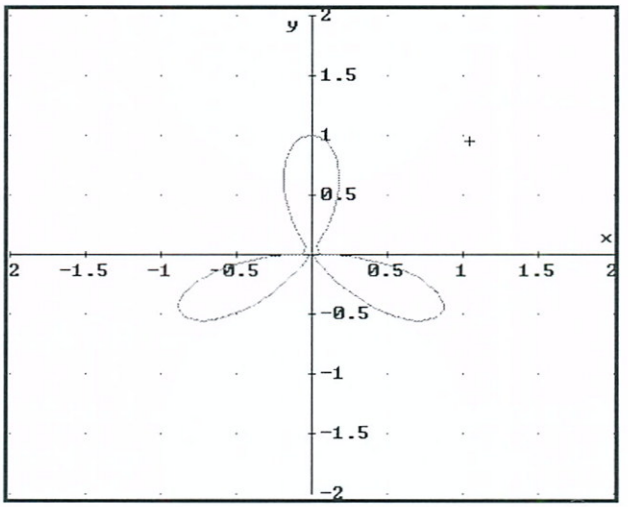


Hoppá! Át kell váltanunk a polár koordinátarendszerbe.

A **Beállítások > Koordináta-rendszer** utasításban válasszuk a **Polár** gombot.



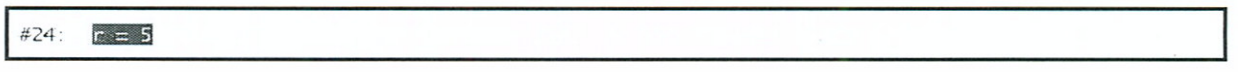
Lépjünk ki az OK-val, töröljük az összes előző ábrát, és jelenítsük meg újra a #23-at. (Kétszer kell megadnunk a szögtartományt, mert a #23 kifejezés két részből áll. A második rész, az *r=0* egy pontként jelenik meg.



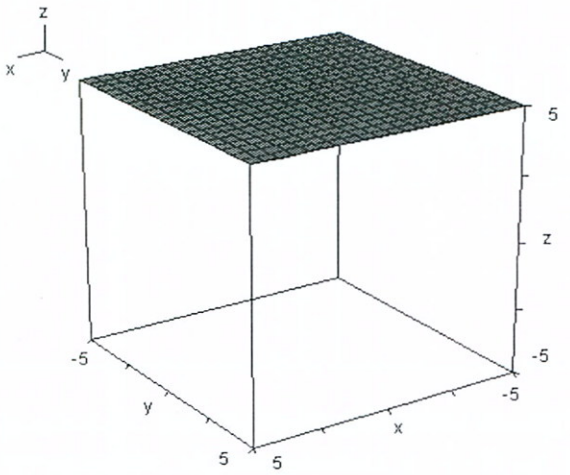
Zárjuk be a 2D-ábrázolás ablakot.

A következőkben próbálkozzunk egy szférikus ábrázolással. A gömbi koordinátarendszerben különösen könnyű egy gömbfelület leírását adó függvényt megadni: *r=R* formában, ahol *R* a gömbfelület sugara.

Írjuk be az *r=5* egyenletet.

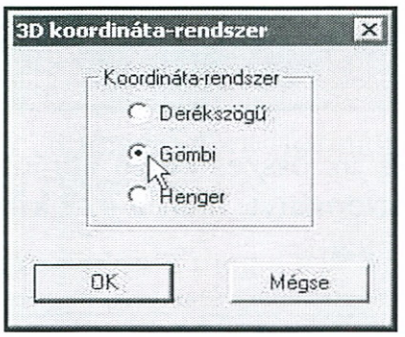


Nyissunk egy 3D-ábrázolás ablakot, helyezzük az ablakokat egymás mellé és ábrázoljuk a #24-et.

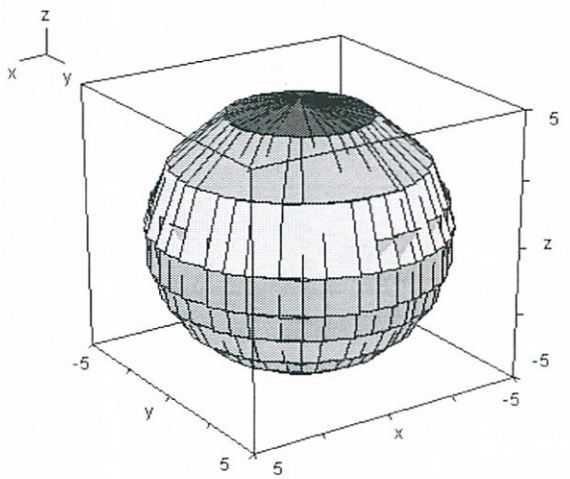


Hoppá! Elfelejtettük átváltani a polár koordinátarendszernek a 3D ablakban megfelelő koordinátarendszerbe.

Állítsuk át a koordinátarendszert: indítsuk a **Beállítások > Koordináta-rendszer** utasítást és válasszuk a **Gömbi** pontot, ...



és lépjünk ki az ablakból az OK-val. Töröljük a síkot és ábrázoljuk az egyenletet újra a gombbal.

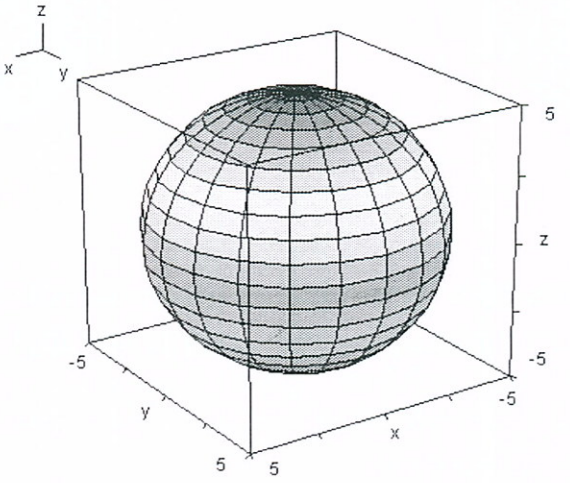


A gömbi ábra általános formulája $r=f(s, t)$, ahol s és t-t szögként értelmezzük.

Emlékezzünk, hogy az **Ábrázolás** gomb s és t alapértelmezett értékeit használja. Ez a tartomány -5-től 5-ig terjed s és t esetében is. Az iménti szférikus ábra esetében viszont

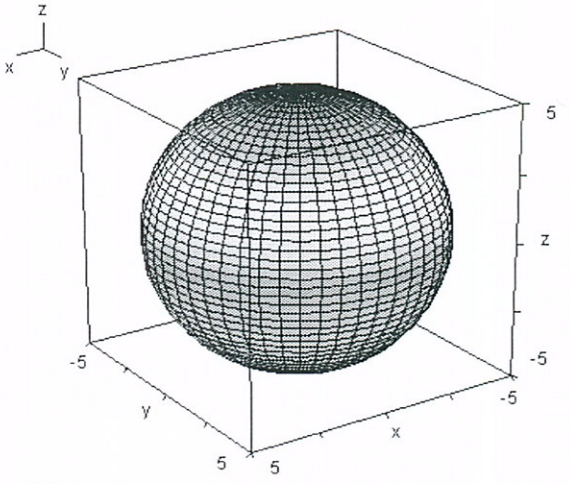
$-\pi$-től π-ig kellene állítanunk *s* tartományát, míg *t* tartományát 0-tól π-ig. Használjuk ezért az **Beszúrás > Ábrázolás** utasítást, hogy ezeket az értékeket beállíthassuk.

💻 Töröljük a gömböt és ábrázoljuk újra a #24 kifejezést, ezúttal az **Beszúrás > Ábrázolás** utasítással. **s** tartomány terjedjen –pi-től pi-ig, és t tartománya 0-tól pi-ig.



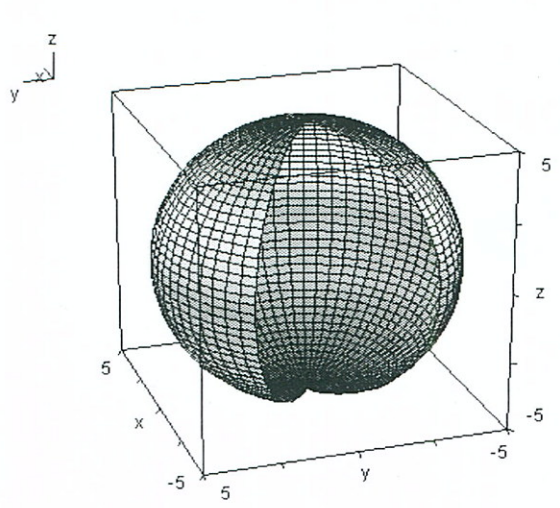
Ez a gömbfelület már jobban néz ki.

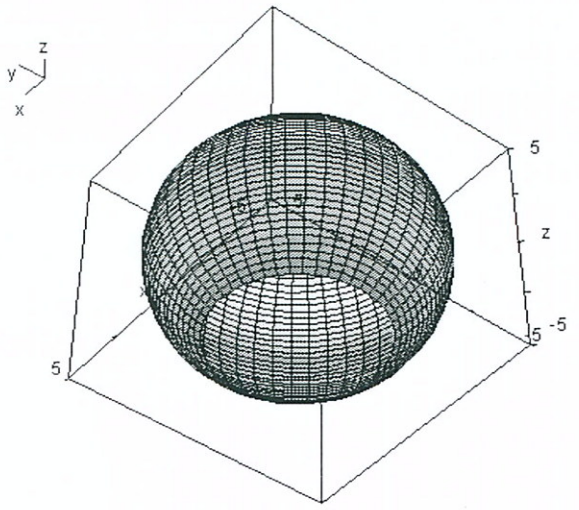
💻 Javítsunk a megjelenítés minőségén a rács vonalszámának növelésével. Válasszunk 50 x 50-es rácsméretet. (Duplán rákattintva az ábrára megjelenik az illető dialógusablak.)



Kísérletezzünk *s* és *t* értékének változtatásával.

💻 Töröljük az ábrát és jelenítsük meg újra, ezúttal *s* tartományát -2,5-től 2,5-ig, *t*-t 0-tól π-ig véve. Forgassuk el megfelelően az ábrát (bal oldali kép). Jelenítsük meg újra, ezúttal *s* legyen $-\pi$-től π-ig és *t* 0-tól 2,5-ig. Ismét forgassuk el az ábrát megfelelően.





A 3D-ábrázolás ablak **Beállítások > Képméretarány** utasítás a doboz oldalainak valóságos hosszúságát állítja be a képernyőn. Ez nem érinti az ábrázolási területet, illetve az ábrázolási tartományt. Így ha valóban gömb alakot szeretnénk megjeleníteni, a képméretarányt 1:1:1-nek kell vennünk és az ábrázolási tartományt is egyenlőre kell állítanunk. Ez az alapértelmezett beállítás.

💻 Lépjünk ki a **DERIVE**-ból mentés nélkül.

Összefoglalás

Algebra ablak

Beállítások > Beállítások: Egyszerűsítési beállítások ..... egyszerűsítési beállítások megváltoztatása

: Komplex gyök ..... komplex gyök kiválasztása

2D-ábrázolás ablak

Beállítások > Koordináta-rendszer ..... grafikus ablak koordináta-rendszerének beállítása

Megjelenítési lehetőségek > Valós és képzetes rész ábrázolása .....

..... kifejezés valós és képzetes részének ábrázolása

15. fejezet

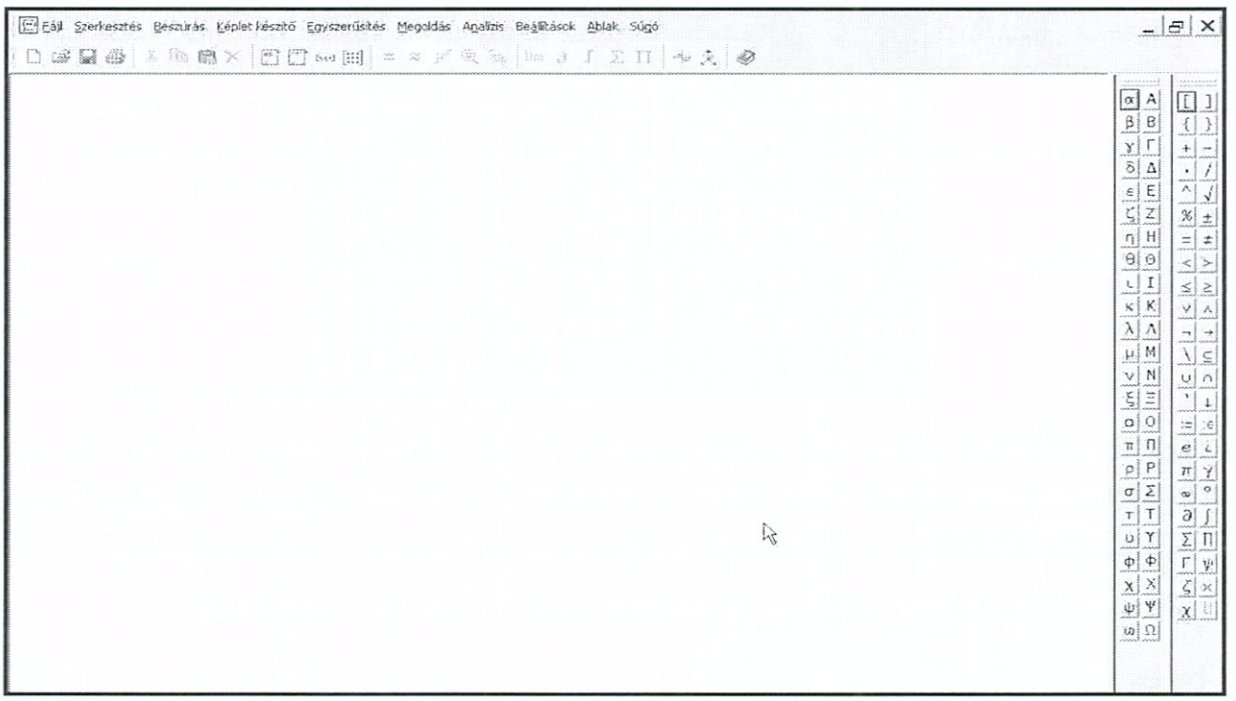
Mit tud még a DERIVE?

Az előző fejezetekben a **DERIVE** azon jellegzetességeivel ismerkedtünk, amelyek a mindennapi felhasználásban segítenek. Ez a fejezet bemutat néhány további felhasználási lehetőséget. Hogy ezeken kívül hogyan használható fel a **DERIVE** megtudható az online súgóból, saját tapasztalatunk adhat segítséget, vagy a **DERIVE**-ról szóló más kézikönyveket is felhasználhatunk.

A kifejezéseken, szöveges objektumokon és beágyazott ábrákon kívül beilleszthetünk bármilyen **OLE** objektumot. (Az **OLE** az *Object Linking and Embedding* kifejezés rövidítése (*Objektumok Összekapcsolása és Beágyazása*) és egy olyan technológia, amely felhasználások közötti információ átvitelt és megosztást szolgálja). Tételezzük fel, hogy a vágólapunkon egy *clipart* ábra vagy egy fotó van, amelyet szeretnénk a munkalapunkba beilleszteni. Tegyük a **DERIVE**-ot aktívvá és illesszük be a képet a CTRL + V billentyűkombinációval.

Kezdhetjük például azzal, hogy a **Beszúrás > OLE Objektum** utasítással egy Microsoft Word dokumentumot nyitunk. Választhatjuk a Word dokumentumok beágyazását a **DERIVE** szöveges objektumok helyett. Ez több szerkesztési lehetőséget kínál, az utóbbit könnyebb viszont használni.

A **DERIVE** eszközsorai mozgathatók. Használjuk a kapaszkodókat (ez a két párhuzamos sáv, amely az eszközsor bal szélén, vagy a tetején található) az eszközsor elmozgatására és elhelyezésére a **DERIVE** alkalmazásban. Ezzel kedvünkre alakíthatjuk a képernyő megjelenési formáját. Az alábbi kép a számos lehetőség egyikét mutatja.



A **Beállítások > Beállítások** menüpont kiválasztása után megjelenő dialógus ablakon 3 fül található: **Beviteli beállítások**, **Egyszerűsítése beállítások** és **Kimeneti beállítások**. Itt lehet a **DERIVE** működését vezérelni. A következőkben nézzük meg, hogyan értelmezi a **DERIVE** a beviteleket.

Írjuk be és egyszerűsítsük: *x0*

```
#1:   x·0
#2:                                                    0
```

Láthatóan a bevitelt *x-szer nulla*-ként értelmezte, mely egyszerűsítés után nullát ad eredményül.

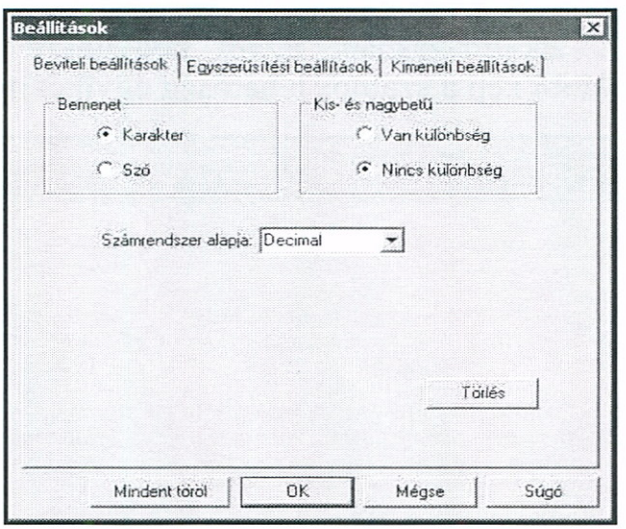
Írjuk be és egyszerűsítsük: *distance=velocity*time*. (Magyarul: *út=sebesség*idő*)

```
#3:   d·i·s·TAN(c)·e = v·e·l·o·CI(t)·y·t·IM(e)
#4:                                                d·e·i·s·TAN(c) = 0
```

Ezt úgy értelmezte, mint egy egyenletet, melynek a két oldalán jó pár ismeretlen és három beépített függvény található. (A jobboldal azért ad nullát egyszerűsítés után, mert az egyik tényezője, az *e* valós változó képzetes része nulla. Figyeljük meg, hogy a time szóban a **DERIVE** felfedezte az **IM** függvényt.)

Mindennek az oka, hogy alapértelmezésben a **DERIVE** beviteli módja a karakter üzemmód, tehát egyetlen változó sem tartalmaz több mint egy karaktert. Ez kényelmes a legtöbb szokványos matematikai műveletnél, hiszen az egybetűs változók (x, y, t, n) lehetővé teszik a bevitelt *xy* vagy *sin x* formában és mindenki megfelelően értelmezi őket és nem hisszük, hogy két furcsa nevű ismeretlenről van szó. Ha olyan ismeretleneket akarunk bevinni, amely több mint egy betűből áll, változtatnunk kell az adott beállításon.

Változtassuk meg a beviteli módot:



A **Bemenet** mezőben válasszuk a **Szó** gombot és mentsük a változtatást az OK-val.

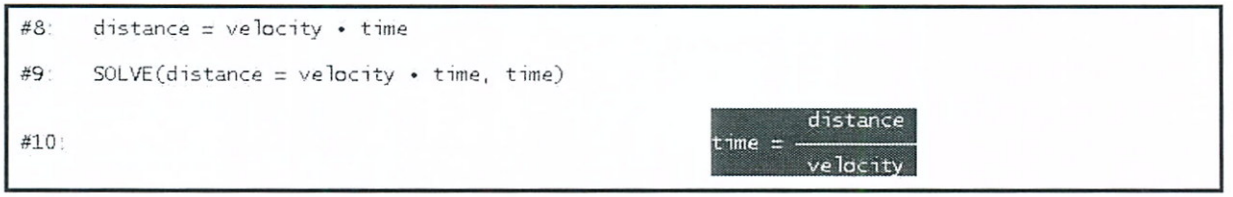
```
#5:   InputMode := Word
```

Ez egy újabb algebra állapot változó. Próbáljuk ki az előző két példánkat.

Írjuk be és egyszerűsítsük: *x0*

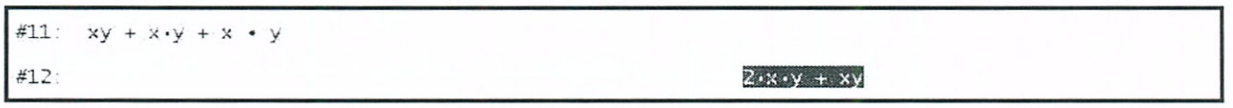
```
#6:   x0
#7:                                                    x0
```

Írjuk be : *distance=velocity*time* kifejezést és a gombbal oldjuk meg a *time*-ra.

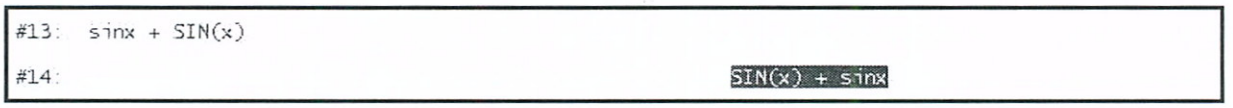


Ha ebben az üzemmódban jelezni akarjuk, hogy x és y szorzatát szeretnénk kapni, azt vagy a * jellel, vagy a szóközzel jelölnünk kell.

Írjuk be és egyszerűsítsük: $xy+x*y+x\ y$



Vigyük be és egyszerűsítsük: $sinx+sin(x)$



Ha teljesen váratlan eredményeket vagy nem egészen egyértelmű hibaüzeneteket kapunk, nem árt megnézni a beviteli beállításokat és figyelni a megjelenítési formákat a képernyőn. Ha tudjuk, hogy a szorzást a pont jelöli, az argumentumokat zárójelek között látjuk és hogy a beépített függvényeket nagybetűkkel szokta megjeleníteni a program, ez segíthet az ilyen problémák felismerésében.

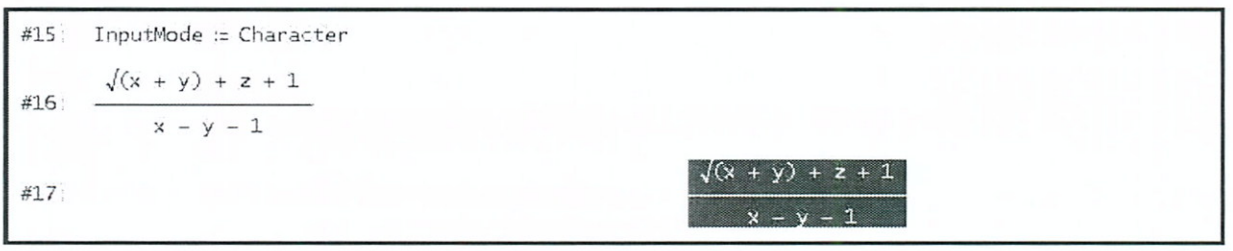
Állítsuk vissza a **Karakter** beviteli módot.

Az **Beviteli beállítások** dialógusablak további mezői:

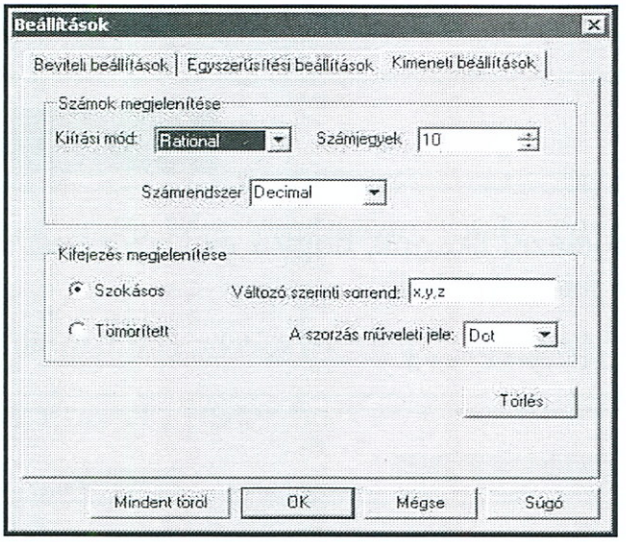
- A **Kis- és nagybetű** mező a kis- és nagybetűk használatát szabályozza. Az alapértelmezett **Nincs különbség** módban a **DERIVE** nem tesz különbséget a kis- és nagybetűk között, míg **Van különbség** módban igen.
- A **Számrendszer alapja** mezőben szabályozhatjuk a számrendszert, amelyben a bevitelt a **DERIVE** értelmezi. Erről később esik majd szó.

A kimeneti megjelenítést a **Beállítások > Beállítások: Kimeneti beállítások** utasítással állíthatjuk be.

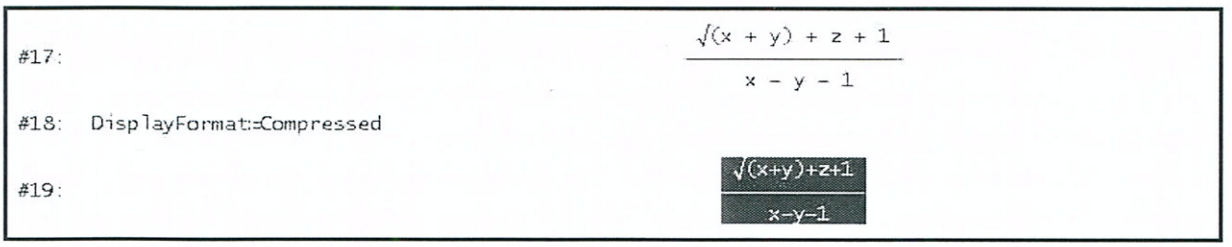
Írjuk be és egyszerűsítsük: $\dfrac{\sqrt{x+y}+z+1}{x-y-1}$.



Változtassunk a kimeneti beállításokon:

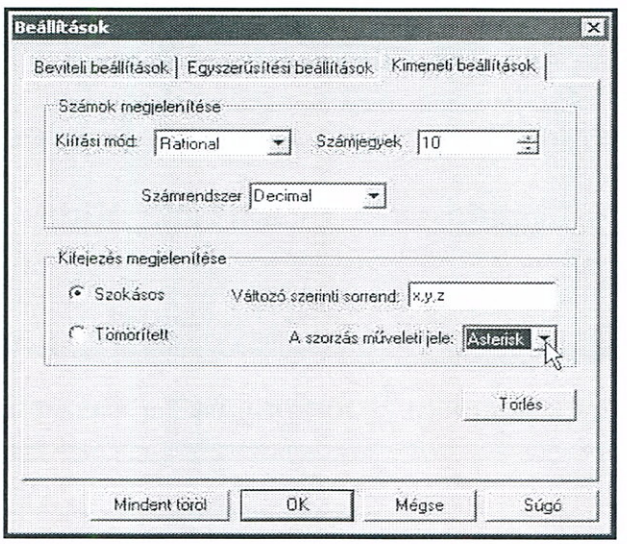


A **Kifejezés megjelenítése** mezőben válasszuk a **Tömörített** gombot. Lépjünk ki az ablakból az OK-val és egyszerűsítsük a legutóbb kifejezést.

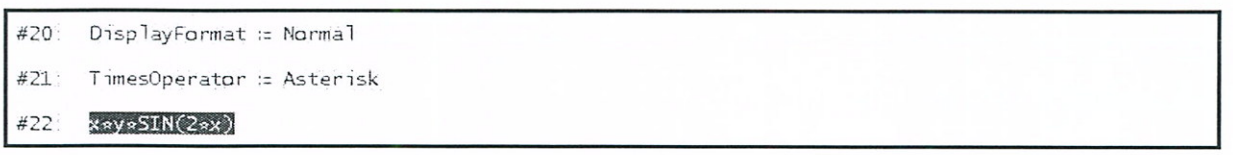


A tér(köz), ami a kifejezések olvashatóságát javítja, itt összeszűkül. Az előnye ennek a megjelenítésnek, hogy adott képernyő felületen több információt tudunk elhelyezni. Segít ez a mód a képernyőn elhelyezni a terjedelmesebb kifejezéseket, amelyeket **Szokásos** üzemmódban nem tudnánk megtenni.

Állítsuk vissza a megjelenítési módot a **Szokásos**ra és változtassuk a szorzás műveleti jelét **Csillag**ra (Asterisk).



Lépjünk ki a dialógusablakból az OK-val, majd írjuk be: *xysin(2x)*



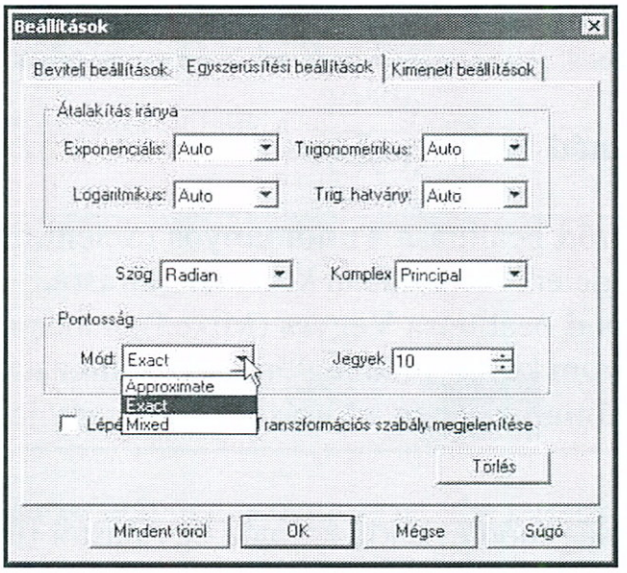
A szorzás műveleti jele mezőben állíthatjuk be, hogy milyen műveleti jelet akarunk kiíratni. Alapértelmezett a megemelt **Pont**. A #26 kifejezés mutatja, hogy néz ki a kifejezés, ha a beállítást **Csillag**ra változtattuk. A harmadik lehetőség, az **Elhagyja** a műveleti jel helyett üres szóközt jelenít meg.

💻 Állítsuk vissza a szorzás műveleti jelét a **Pont**ra (Dot).

```
#23:  TimesOperator := Dot
```

A pontosságot a **Beállítások > Beállítások: Egyszerűsítési beállítások** utasításban állíthatjuk be. A parancs egy dialógusablakot nyit, ahol a **Pontosság** mezőben megválaszthatjuk a **Módot** és a **Jegyek számát**.

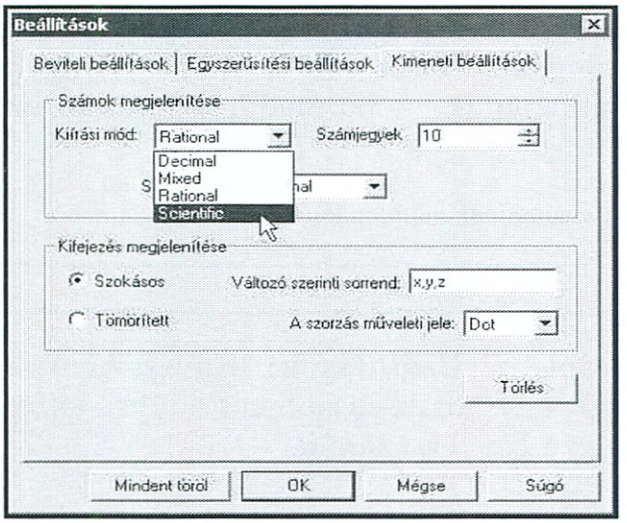
💻 Nyissuk le a **Mód** menüablakot.



- Az alapértelmezett mód a **Pontos** (Exact). Ebben a módban a **DERIVE** pontos számítást végez az egész számokkal, amilyen például az 5, a törtekkel, mint amilyen a 2/3, és az olyan irracionális számokkal, mint a $\sqrt{2}$, az e és a π.
- **Vegyes** (Mixed) beállításban a **DERIVE** az irracionális számokat racionális számokkal helyettesíti, melyek olyan pontossággal közelítik meg az értéküket, amit a **Jegyek száma** mezőben beállítottunk.
- Ha a **Közelítő** (Approximate) mód van kijelölve, a **DERIVE** az irracionális számokat és az olyan törteket, amelyeknek a számlálója és nevezője nagy, olyan törtekre cseréli, melyeknek a számlálója és nevezője kicsi. A helyettesítés ismét a beállított **Jegyek száma**tól függ.
- A **Jegyek száma** mezőben határozhatjuk meg **Vegyes** és **Közelítő** módban használt számjegyek számát. A **Pontos** üzemmódban a különböző kiértékelő eszköz alkalmazásának pontosságát kontrolálja.

A számok megjelenítése beállítás, amit a kimenet megjelenítésénél használunk független a pontosság módtól.

💻 Indítsuk a **Beállítások > Beállítások: Kimeneti beállítások** utasítást és nyissuk le a **Kiírási mód** menüablakot.



- Mikor a **Kiírási mód** beállítása **Racionális** (Rational), a megjelenített számok egész számok, törtek, gyökös kifejezések és irracionális állandók, mint az e és a π lehetnek.
- Mikor a **Kiírási mód** beállítása **Tízes** (Decimal), a megjelenített számok tizedes törtek lehetnek.
- Mikor a **Kiírási mód** beállítása **Tudományos** (Scientific), a megjelenített számok a tudományos megjelenítési módban kerülnek kiírásra.
- Mikor a **Kiírási mód** beállítása **Vegyes** (Mixed), a megjelenített számok értéküktől függően a fenti három kiírási mód legtömörebb változatában jelennek meg.
- A **Számjegyek száma** mezőben a kiírásra kerülő számjegyek számát határozhatjuk meg.

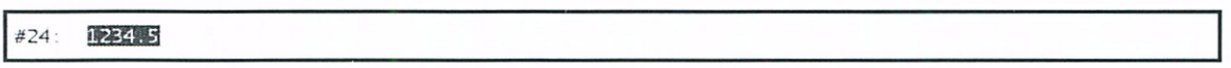
Habár elméletben a pontosság mód és a kiírási mód egymástól függetlenek, ha változtatunk a pontosság beállításán, ez a kiírás egy megfelelő beállítását automatikusan vonja magával. Ezt természetesen manuálisan meg lehet változtatni.

A **Pontos** mód a **Racionális**, **Közelítő** mód a **Tudományos**, a **Vegyes** mód **Vegyes** kiírási módot eredményez.

A számjegyek megjelenítésénél a **Számjegyek számát** az befolyásolja, ha változtatunk a pontosság beállításánál a **Jegyek számán.**

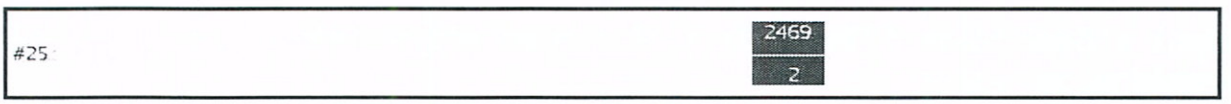
A következő példák bemutatják a különböző kiírási módokat.

💻 Írjuk be az *1234,5*-et.

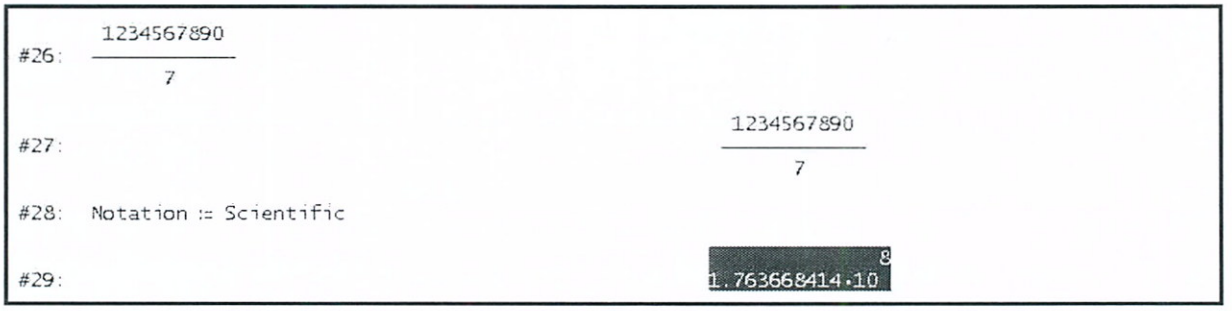


A program ezt racionális számként tárolja.

💻 Egyszerűsítsük az *1234,5*-et.



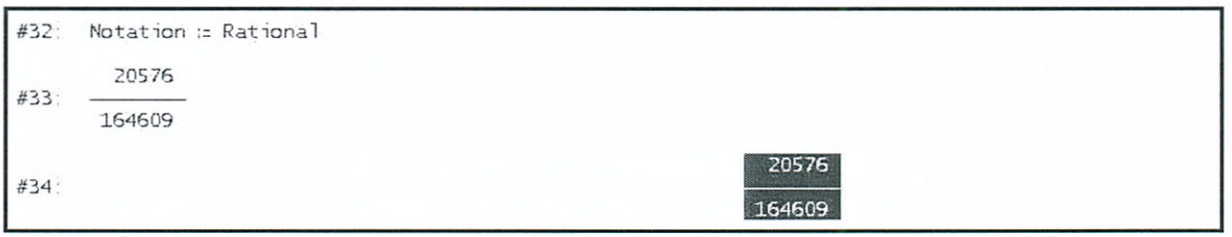
💻 Vigyük be és egyszerűsítsük a következő törtet: $\frac{1234567890}{7}$. A **Beállítások** > **Beállítások: Kimeneti beállítások** alkalmazásával a kiírás módját állítsuk **Tudományos**ra, majd egyszerűsítsünk ismét.



Állítsuk be a kiírás módját **Tízes**re és utána egyszerűsítsük újra a #30 kifejezést.

A következő feladatokhoz állítsuk vissza az alapbeállításokat.

Állítsuk vissza az alapbeállításokat a **Beállítások > Beállítások: Mindent töröl** utasítással, majd írjuk be és egyszerűsítsük a $\frac{20576}{164609}$-et.



Állítsuk át a számítás pontosságát hat számjegyre, de tartsuk meg a kiírás esetében a racionális módot.

A **Beállítások > Beállítások: Egyszerűsítési beállítások** utasítással állítsuk a pontosságot **Közelítés** (Approximate) módra, és 6 számjegyre. Mivel ilyen esetben a kiírás automatikusan átállítódik, a **Beállítások > Beállítások: Kimeneti beállítások** ablakban állítsuk a kiírás módot **Racionális**ra.

Egyszerűsítsük újra a $\frac{20576}{164609}$-et.

Emlékezzünk, hogy ebben a módban az olyan racionális számokat, melyekben nagy számláló és nevező szerepel, olyan racionális számokra cseréli, melyeknek a számlálója és nevezője kisebb. Fent egy ilyen példát láttunk. A $\frac{20576}{164609}$-et a közelítő, 1/8 helyettesítette.

(A #38 kifejezés mutatja, hogy nem a közös tényezők törlésével kaptuk az eredményt. Bizonyítsuk, hogy ez a közelítő érték hat számjegyig pontos.

Értékeljük ki a $\frac{20576}{164609}$-et és az 1/8-ot is.

```
#39:                                    0.125
#40:                                    0.125
```

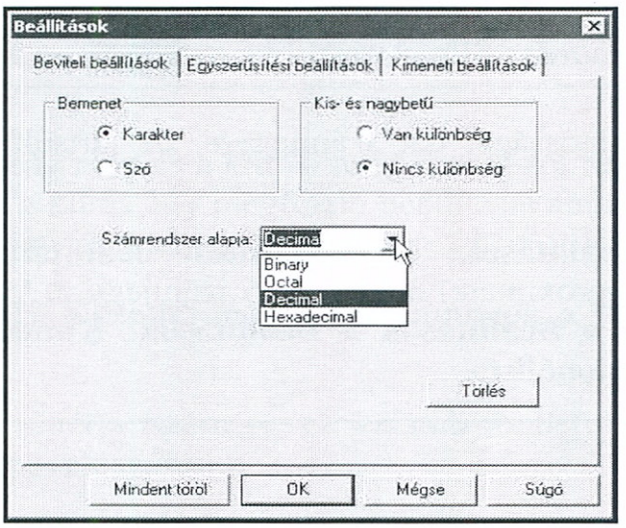
Mivel hat számjegy pontossággal számoltunk, a különbség a $\frac{20576}{164609}$ és az 1/8 között a hat számjegyen túl kell hogy legyen. Állítsunk nagyobb pontosságot.

Állítsuk a pontosságot 15 számjegyre és számítsuk ki a két tört közelítő értékét újra.

```
#41:  PrecisionDigits := 15
#42:                                    0.124999240624753
#43:                                    0.125
```

A tízes számrendszer mellett használhatunk más számrendszereket is. Lehetőség van arra is, hogy különböző számrendszert használjunk a bemenethez és a kimenethez, ami hasznos lehet a számrendszerek konverziójához. Változtassunk a bemeneti számrendszeren.

Indítsuk a **Beállítások > Beállítások: Beviteli beállítások** utasítást és nyissuk le a **Számrendszer alapja** menüpontot.



Négy különböző számrendszerből választhatunk. A **Számrendszer alapja** mezőbe 2 és 32 között bármely egész számot beírhatjuk. Ha tíznél nagyobb alapú számrendszert használunk, amelynek első tagja egy betű, eléje egy 0 előtagot kell tennünk, hogy a **DERIVE** meg tudja különböztetni a számot a változótól. Például a tizenhatos alapú számrendszerben (a **Számrendszer alapja** a **Tizenhatos**) 0A egyenlő 10, 0B egyenlő 11, ..., 0F egyenlő 15 és 10 egyenlő 16.

Bináris szám beviteléhez állítsuk a **Számrendszer alapja** menüpontot **Kettes**re (Binary), majd lépjünk ki OK-val.

```
#44:  InputBase := Binary
```

Írjuk be a következőt: *10011+1110*

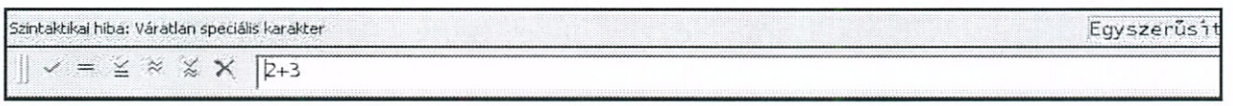
```
#45:  19 + 14
```

Megváltoztattuk a bevitel alapját, amely csak a beírt karaktersor olvasását befolyásolja. A visszajelzés a képernyőn még tízes számrendszerben jelenik meg, hiszen ezt a kimeneti beállítás paraméterei határozzák meg és a kimeneti számrendszer alapja még a **Tízes**. (Itt a „kimenet" a képernyő kiírását jelenti, nem a számítás eredményét.)

💻 Állítsuk át a számrendszer kimeneti alapját kettesre: Indítsuk a **Beállítások > Beállítások: Kimeneti beállítások** utasítást és a **Számrendszer alapja** mezőben válasszuk a **Kettes** (Binary) menüpontot. Ismételjük meg az iménti bevitelt: *10011+1110*. Egyszerűsítsük a kifejezést.

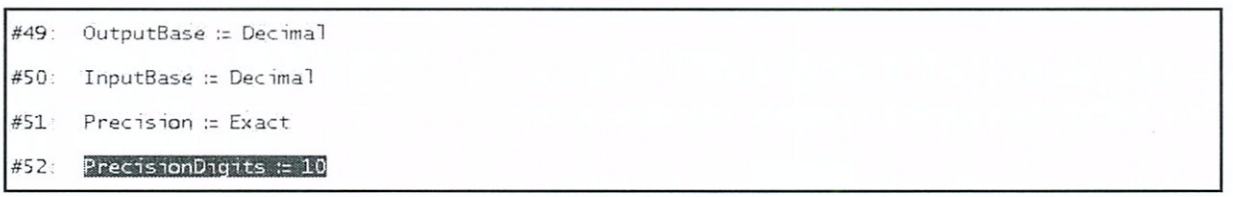
Nézzük meg mi történik, ha olyan számokat akarunk beírni, amelyek nem használatosak a kettes számrendszerben.

💻 Írjuk be: *2+3*



Az üzenet a szintaktikai hiba feltételezhető okára is utal.

💻 Állítsuk vissza az alapértelmezett beállításokat a **Beállítások > Beállítások: Minden töröl** utasítással.



A véletlen számok sokszor szerepelnek a különböző matematikai alkalmazásokban. A **DERIVE RANDOM** függvénye egy pszeudo-véletlenszám generátorral rendelkezik. A RANDOM(*n*) egy véletlenszerű egész számot generál 0 és n-1 között.

💻 Adjunk meg három véletlen számot 0 és 5 között, háromszor beírva: *random(6)=*

A kapott eredmény ettől valószínűleg eltér.

Egy számot hozzáadva megváltoztathatjuk azt az intervallumot, amelyből véletlenszerűen választ számokat. Például 1-et hozzáadva az 1+**RANDOM** (6) eredményei 1 és 6 közé esnek, úgy, mintha kockát dobnánk. Felhasználva a **VECTOR** függvényt, többször egymás után is behívhatjuk a véletlenszám-generátort egyetlen egyszerűsítéssel.

💻 Tíz kocka dobás szimulálására írjuk be és egyszerűsítsük a következő kifejezést: *vector(1+random(6),i,1,10)*

```
#56:  VECTOR(1 + RANDOM(6), i, 1, 10)
#57:                                   [3, 4, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 3, 3]
```

Kockával végzett matematikai kísérletekhez definiáljuk a THROWS függvényt, amelyben a dobások számát egy argumentumban adjuk meg.

Definiáljuk a THROWS függvényt: *throws(n):=vector(1+random(6),i,1,n)*

Próbáljuk ki a függvényt, húsz dobást szimulálva. Írjuk be és egyszerűsítsük: *throws(20)*

```
#58:  throws(n) := VECTOR(1 + RANDOM(6), i, 1, n)
#59:  throws(20)
#60:                    [1, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 4, 6, 1, 1, 1]
```

Ezt a függvényt használva pillanatok alatt dobhatunk 50-et, 100-at, 1000-t vagy akár még többet is.

Mikor a valószínűséggel kísérletezünk, a leggyakrabban felmerülő kérdés az, hogy *„Milyen gyakran fordul elő egy bizonyos esemény?"* A **SELECT** függvény nagyon hasznos lehet egy bizonyos előfordulás izolálására. Nézzük meg, hányszor fordul elő a 4-es szám két dobási kísérletben. Dobjunk mindkétszer 50-szer.

Írjuk be a kifejezést: *select(x=4,x,throws(50))* és egyszerűsítsük kétszer, szimulálva a két kísérletet.

```
#61:  SELECT(x = 4, x, throws(50))
#62:                                   [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]
```

Megszámolhatjuk magunk is, hogy ezek a vektorok hány tagból állnak, de felhasználhatjuk a **DERIVE DIM** függvényét is ennek kiszámolására.

Számoljuk meg a #66 vektor elemeit: *dim(#62)=*

```
#63:                                   DIM([4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]) = 7
```

Kombináljuk az előbbi függvényeket és függvény alkalmazásokat és definiáljuk a HOWOFTEN függvényt, amely meghatározza, hogy az *m* szám hányszor fordul elő *n*-szer dobva a kockát.

Definiáljuk a *HOWOFTEN(m,n):=dim(select(x=m,x,throws(n)))*

```
#64:  HOWOFTEN(m, n) := DIM(SELECT(x = m, x, throws(n)))
```

Számítsuk ki, hányszor fordul elő a 6 négyszer 600 dobás során.

Írjuk be*: howoften(6,600)*, majd egyszerűsítsünk négyszer.

```
#65:  HOWOFTEN(6, 600)
#66:                                                  92
#67:                                                  93
#68:                                                 109
#69:                                                 114
```

Az eredmény nem meglepő. A hat lehetőség mindegyike megközelítőleg a dobások egy hatodában fordul elő. Minél több a dobások száma, várhatóan annál közelebb kerülünk a dobások egy hatodához.

Az eredmény, amit mi kapunk nyilván pontosan ilyen. Valóban véletlen számok ezek? Nos valójában a pszeudo-véletlenszám generátornak megvan a határozott kezdőértéke és ciklusa. Ugyanakkor a pszeudo-véletlenszám generátor által előállított számok a legtöbb olyan tulajdonsággal rendelkeznek, mint az „igazi" sorozatok. Viszont ha ugyanazt a kísérletsort hajtjuk végre két különböző számítógépen, ugyanazt az eredményt kapjuk. Ez különösen hasznos lesz programok tesztelésére és korrigálására.

A kezdőpont viszont lehet még véletlenszerűbb a ciklusban.

💻 Válaszunk ki új véletlen számokat begépelve és egyszerűsítve: *random(0)*

```
#70:  RANDOM(0)
#71:                                        2130136787
```

A függvény ilyen behívása inicializálja a számítógép órájától függő pszeudo-véletlenszám generátort. Ennek megfelelően a fejezet hátralévő részében a könyvtől eltérő eredményeket kell kapnunk.

Ha viszont a véletlenszám választást egy bizonyos n pozitív egész számtól akarjuk függővé tenni, a RANDOM(-n)-t kell egyszerűsítenünk.

Generáljunk egy véletlen számot 0 és 1 között a **RANDOM** függvény argumentumaként 1-et választva.

💻 Generáljunk egy véletlen számot 0 és 1 között beírva és egyszerűsítve: *random(1)*

```
#72:  RANDOM(1)
                                          1380761
#73:
                                          1381100
```

Ha inkább tizedes törtet akarunk kimenetként, válasszuk a kiértékelést.

💻 Keressünk két véletlen számot 0 és 1 között tizedes törtekben a #72 kifejezést kétszer kiértékelve.

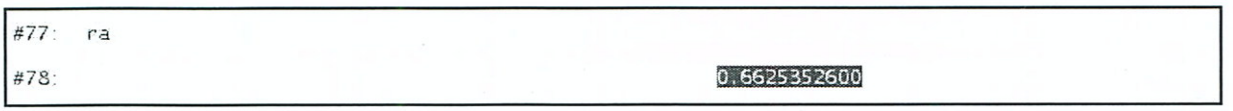
```
#74:                                      0.3295689352
#75:                                      0.9858139529
```

Még egy megjegyzés a véletlen számokról. Nem kell mindig kiírnunk a **RANDOM** kifejezést, helyette alkalmazhatunk egy rövidítést a pszeudo véletlenszám-generátor behívására, ha elkészítjük a hozzárendelést.

💻 Írjuk be a hozzárendelést: *ra:= random(1)*

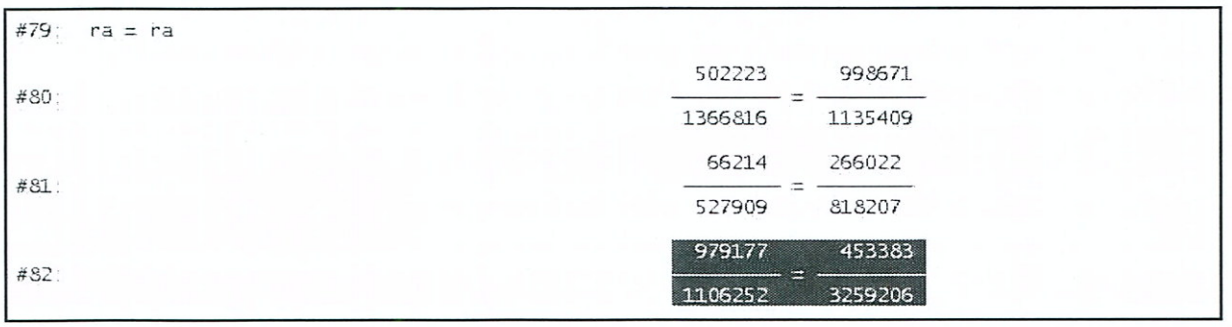
```
#76:  ra := RANDOM(1)
```

Keressünk egy véletlen számot 0 és 1 között tizedes törttel kiírva. Írjuk be és értékeljük ki: *ra*



Az egyszerű algebrai azonosságok már nem érvényesek ezekre az objektumokra.

💻 Írjuk be és egyszerűsítsük háromszor: *ra=ra*



Mikor a *ra=ra* kifejezést egyszerűsítjük, vagy kiértékeljük, a véletlenszám-generátort kétszer hívjuk be, ennek eredményeként az eredmény két véletlen szám az egyenlőségek két oldalán.

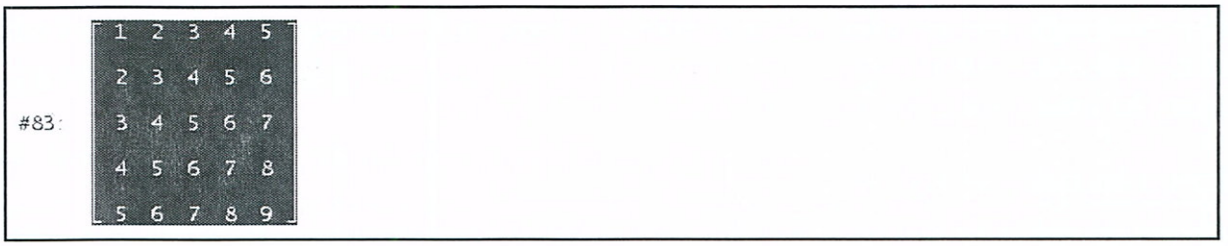
Úgyszintén más-más eredményt kapunk *ra·ra* és ra^2 esetében. *ra·ra*-t egyszerűsítve, vagy kiértékelve a véletlenszám-generátort kétszer hívjuk be és az eredmény a két véletlen szám szorzata lesz. ra^2-et kiértékelve, vagy egyszerűsítve a véletlenszám-generátort egyszer hívjuk be, és az eredmény a véletlen szám négyzete.

A 9. fejezetben különböző technikákat sajátítottunk el a mátrixok bevitelére. Használhatunk egy másfajta beviteli módot, ha csak numerikus bevitelt akarunk használni.

💻 Készítsünk egy ASCII állományt **mat.txt** vagy **mat.dat** néven a következő tartalommal. Használjuk valamelyik ismerős szövegszerkesztő programot és mentsük tisztán ASCII szövegként. A **WINDOWS** NOTEPAD mindig ilyen módon működik. Helyezzük egy olyan könyvtárba, ahol biztosan megtaláljuk.

```
1,2,3,4,5
2,3,4,5,6
3,4,5,6,7
4,5,6,7,8
5,6,7,8,9
```

💻 Töltsük be a **mat.txt** állományt. Alkalmazzuk a **Fájl > Betöltés > Adat fájl** utasítást és adjuk meg az elérési utat és az állomány nevét.



Ez a módszer különösen alkalmas nagy mátrixok bevitelére. Ezt a módszert alkalmazhatjuk, ha táblázatokból és/vagy más forrásból kapott numerikus adatokat akarunk importálni, hogy feldolgozzuk a **DERIVE**-val.

A **DERIVE** lehetőséget biztosít, programokat írására is. Erről már tanultunk néhány dolgot az előző fejezetekben. Közülük az egyik fontos alkalmazás az IF függvény. Használhatunk visszacsatoló függvényeket is a **DERIVE**-ban, olyanokat, amelyek önmagukra utalnak vissza. A következő visszacsatoló függvény a beépítet faktoriális függvény egy alternatívája: $fact(n) := \begin{cases} 1 & ha\ n = 0 \\ n \cdot fact(n-1) & különben \end{cases}$

💻 Definiáljuk a FACT függvényt. Írjuk be: *fact(n):=if(n=0,1,n fact(n-1))*

```
#84:  fact(n) :=
        If n = 0
          1
          n·fact(n - 1)
```

Hát igen, elég nehézkes egy sorba ezt beírni. Aktiváljuk a többsoros beviteli lehetőséget a **Beállítások > Megjelenítés > Többsoros kifejezések bevitele** menüpontban (Emlékezzünk: sortörés: ALT+ENTER).

```
facti(n):=prog(z:=1,
               i:=1,
               loop(if(i>n,return(z)),
                    z:=z*i,
                    i:=i+1))
```

💻 Próbáljuk ki a függvényt, argumentumként 5-öt választva: *fact(5)=*

```
#85:                                    fact(5) = 120
```

Egy másik igen hasznos függvény az **ITERATES**. A következő példa mutatja, mire használható az **ITERATES** függvény:

💻 írjuk be és egyszerűsítsük: *iterates(sinx,x,t,4)*

```
#86:  ITERATES(SIN(x), x, t, 4)
#87:                          [t, SIN(t), SIN(SIN(t)), SIN(SIN(SIN(t))), SIN(SIN(SIN(SIN(t))))]
```

Ez a kifejezés egy vektort generál, melynek elemeit a következő definíció adja: $\begin{cases} x_1 = t \\ x_{n+1} = \sin(x_n) \end{cases}$. Az **ITERATES** függvénynek három vagy négy argumentuma lehet.

- Az első argumentum egy kifejezés, mely leírja az ismétlődést.
- A második argumentum a kifejezés változója.
- A harmadik argumentum az ismétlődés induló értéke.
- A negyedik (lehetséges) argumentum a számítandó ismétlődések száma.

A következő példában x változóra számítjuk ki az $\sqrt{x+1}$ ismétlődését $\sqrt{2}$ induló értékkel.

Keressük az első 3 ismétlődést.

💻 Írjuk be és egyszerűsítsük: *iterates(√(x+1),x,√2,3)*

```
#88: ITERATES(√(x + 1), x, √2, 3)
#89:                                [√2, √(√2 + 1), √(√(√2 + 1) + 1), √(√(√(√2 + 1) + 1) + 1)]
```

Ennek a vektornak négy eleme van, az induló érték és az első három ismétlődés. Ismételjük meg a példát úgy, hogy az **ITERATES** függvény helyett az **ITERATE** függvényt használjuk.

Írjuk be és egyszerűsítsük: *iterate(√(x+1),x, √2,3)*

```
#90: ITERATE(√(x + 1), x, √2, 3)
#91:                                √(√(√(√2 + 1) + 1) + 1)
```

Míg az **ITERATES** egy olyan vektort eredményez, amely tartalmazza az ismétlődési eljárás minden eredményét, az **ITERATE** az **ITERATES** által generált vektor utolsó elemét adja.

Az **ITERATE** vagy az **ITERATES** függvény egyik alkalmazási lehetősége a sok közül a *fixpont módszer*, mellyel megkereshetjük *f* függvény fix *pontját*. Ez egy *t* érték, vagyis *f(t)=t*. Ezt az egyenletet gyakran úgy tudjuk megoldani, hogy indulunk egy *t* értékkel, majd vesszük *f(t)*-t, *f(f(t))*-t, *f(f(f(t)))*-t és így tovább, és ez az amit tulajdonképpen az **ITERATES** csinál. Bizonyos feltételek között ez a folyamat konvergál *f* egy fix pontja felé. Mint például a koszinusz függvény:

Határozzuk meg a koszinusz első 9 ismétlődését, ha a kiinduló értéket 1-nek vesszük.

```
#92: ITERATES(COS(x), x, 1, 9)
#93: [1, COS(1), COS(COS(1)), COS(COS(COS(1))), COS(COS(COS(COS(1)))), COS(COS(COS(COS(COS(1))))),
      COS(COS(COS(COS(COS(COS(1)))))), COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(1))))))),
      COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(1)))))))), COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(1))))))))),
      COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(1))))))))), COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(1)))))))))),
      COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(COS(1))))))))))]
```

Egy **ITERATES** kifejezésre általában értelmetlen az **Egyszerűsít** gombot használni.

Számítsuk ki a #92 közelítő értékét.

```
#94: [1, 0.5403023058, 0.8575532158, 0.6542897904, 0.7934803587, 0.7013687736, 0.7639596828, 0.7221024250, 0.7504177617,
      0.7314040424]
```

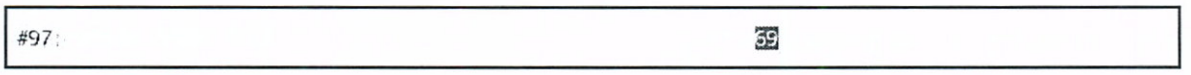
Úgy tűnik, hogy az ismétlődés tart egy 0,73 és 0,75 között lévő szám felé. Ha elhagyjuk a negyedik argumentumot (azaz az ismétlődések számát), a **DERIVE** folytatja az ismétlési eljárást mindaddig, amíg az eredmény már nem változik a jelenlegi pontosság beállítás mellett.

Írjuk be és értékeljük ki: *iterates(cosx,x,1)*

```
#95: ITERATES(COS(x), x, 1)
#96: [1, 0.5403023058, 0.8575532158, 0.6542897904, 0.7934803587, 0.7013687736, 0.7639596828, 0.7221024250, 0.7504177617,
      0.7314040424, 0.7442373549, 0.7356047404, 0.7414250866, 0.7375068905, 0.7401473355, 0.7383692041, 0.7395672022,
      0.7387603198, 0.7393038923, 0.7389377567, 0.7391843997, 0.7390182624, 0.7391301765, 0.7390547907, 0.7391055719,
      0.7390713652, 0.7390944073, 0.7390788859, 0.7390893414, 0.7390822985, 0.7390870426, 0.7390838469, 0.7390859996,
      0.7390845495, 0.7390855263, 0.7390848683, 0.7390853116, 0.7390850130, 0.7390852141, 0.7390850786, 0.7390851699,
      0.7390851084, 0.7390851498, 0.7390851219, 0.7390851407, 0.7390851281, 0.7390851366, 0.7390851309, 0.7390851347,
      0.7390851321, 0.7390851339, 0.7390851327, 0.7390851335, 0.7390851330, 0.7390851333, 0.7390851331, 0.7390851332,
      0.7390851331, 0.7390851332, 0.7390851331, 0.7390851332, 0.7390851332, 0.7390851332, 0.7390851332, 0.7390851332,
      0.7390851332, 0.7390851332, 0.7390851332, 0.7390851332]
```

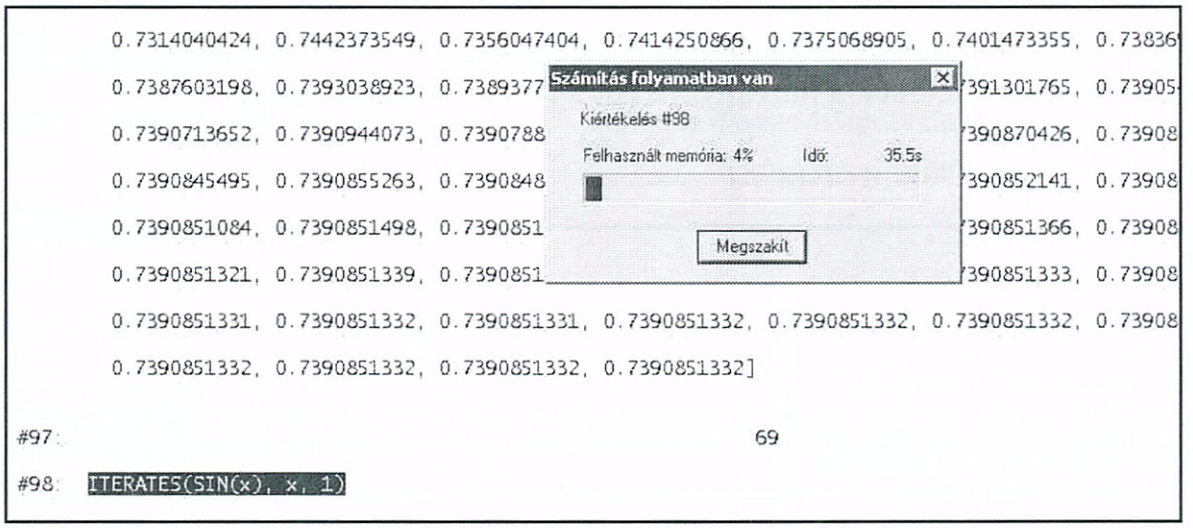
Az ismétlődés száma eggyel kevesebb, mint az eredményként kapott vektor elemeinek száma, mert a vektor tartalmazza az induló értéket.

Határozzuk meg a #103 vektor terjedelmét a **DIM** függvénnyel. Írjuk be: *dim(#96)*, majd nyomban használjuk a beviteli eszközsor **Egyszerűsítés** gombját . Ezzel elkerülhetjük a szükségtelen egyszerűsítetlen kifejezés kiírását.



Még a közelítő érték számítása sem garantálja, hogy az ismétlődés befejeződik. Ha a számítás túl sok ideig tart, megszakíthatjuk. Ami működött a koszinusz esetében, nem működik a szinusz esetében.

Írjuk be és értékeljük ki: *iterates(sinx,x,1)*



Szakítsuk meg a számítást.

A szótárak meghatározása szerint *egy program nem más, mint eljárás egy probléma megoldására, beleértve az adatgyűjtést, a feldolgozást és az eredmények közvetítését.* Azok, aki programozást tanulnak, rendszerint valamilyen programozási nyelvet tanulnak meg, mint például a C vagy a PASCAL. Minden ilyen nyelv hasonló programozási szerkezeteket kínál fel: hozzárendelés, hurkok, feltételek, szubrutinok stb. Ezen szerkezetek használatát *eljárás* programozásnak nevezzük.

A másik alternatívát a *funkcionális* programozás kínálja, amely közelebbi rokonságban áll a matematikai felfogással. Ez csak függvényeket használ programként. Következésképpen a programozás feladata a függvények definiálását jelenti. A **DERIVE**-ban a programozás kombinálja ezt a két megközelítést. Funkcionális és kínálja a legtöbb eljárás szerkezeteket is, melyeket a hagyományos programozási nyelvekből ismerünk.

A **WRITE** és **DISPLAY** függvények használatával a részleteket is nyomon követhetjük. Egy program tesztelésében hasznos segítség lehetnek.

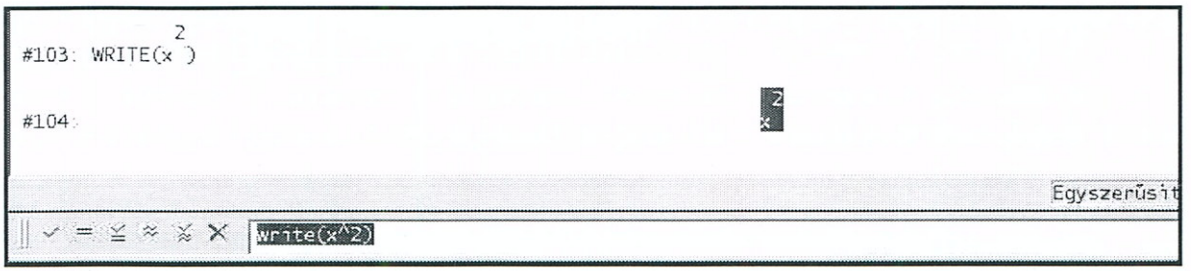
Írjuk be és egyszerűsítsük: *display(x^2)*

Az "x^2"-et szövegdobozban jeleníti meg

Írjuk be és egyszerűsítsük: *display(x^2,2)*

A display függvény második argumentuma meghatározza, hogy a szövegdoboz hány sort foglalhat el. Két sor esetében a hatványkitevőt a felső sorban ábrázolja.

Írjuk be és egyszerűsítsük: *write(x^2)*



A kifejezést az állapotsor bal alsó sarkában jeleníti meg.

A **DERIVE** számos segédfájlt tartalmaz. Nyissunk meg néhányat és nézzük át a példákat. A segédfájlok a **Math** könyvtárban találhatóak (a **DERIVE** könyvtárán belül)

A **Users** könyvtárban felhasználók által készített **DERIVE** programok találhatóak.

Összefoglalás

Algebra ablak

Fájl > Betöltés > Adat fájl ..... numerikus tömb betöltése adat fájlból

Beszúrás > OLE objektum ..... új OLE objektum beszúrása az aktív munkalapra

Beállítások > Beállítások: Beviteli beállítások ..... kifejezés bevitelének beállításai

: Számrendszer alapja ..... számrendszer alapjának kiválasztása

Beállítások > Beállítások: Kimeneti beállítások ..... kifejezés kimenetelének beállításai

: Számok megjelenítése ..... **Kiírási mód, Számjegyek száma, Számrendszer alapja**

: Kifejezés megjelenítése ..... kifejezés megjelenítésének kiválasztása (**Szokásos, Tömörített**)

Beállítások > Beállítások: Mindent töröl ..... az összes állapotváltozó alaphelyzetbe hozása

Függvények

DIM ..... vektor vagy halmaz elemeinek száma

RANDOM ..... pszeudo-véletlenszám generátor

16. fejezet

TI-89, TI-92+, vagy Voyage200 típusú kézi számítógépek kommunikációja a DERIVE-val

A **DERIVE** 6 újdonsága, hogy lehetővé teszi a Texas Instruments TI-89, TI-92+, és Voyage200 típusú kézi számítógépekkel való kommunikációt. Adatok importálása és exportálása is lehetséges. Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogyan működik az adatcsere a **DERIVE** 6 és kézi számítógépe között. A bemutatott kézi számítógépes képernyők Voyage200 típuson készültek. A TI-92+ vagy a TI-89 ugyanígy működik, különbség, hogy a TI-89 típusnak kisebb a képernyőfelbontása. Az importáláshoz és exportáláshoz szükséges a TI Connect® software telepítése a számítógépre, valamint a kézi számítógép PC-re csatlakoztatható adatkábele (A **DERIVE** 6 installálásakor a TI Connect software telepítése kiválasztható). Az adatkábel beszerezhető a Texas Instrument-től, bővebb információ a **http://education.ti.com**.web oldalon található. A továbbiakban feltételezzük, hogy Ön ismeri kézi számítógépét, tudja hogyan kell szöveg típusú (text) adatokat kezelni.

💻 Indítsuk a **DERIVE**-ot az eredeti beállításokkal!

Készítsünk egy egyszerű munkalapot:

💻 Írjuk be, majd differenciáljuk a függvényt: *x^2+sin(2x)*

```
#1:   x^2 + SIN(2·x)

      d    2
#2:   —— (x  + SIN(2·x))
      dx

#3:                              2·COS(2·x) + 2·x
```

Számoljuk ki a derivált zérushelyeit.

💻 Nyomjuk meg a megoldás gombot.

```
#4:   SOLVE(2·COS(2·x) + 2·x, x)

#5:                              COS(2·x) + x = 0
```

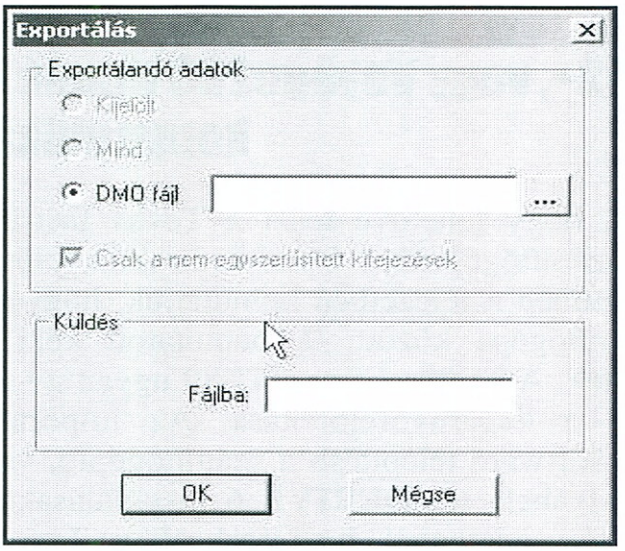
A **DERIVE** nem talált egzakt megoldást, próbáljuk meg numerikus módszerrel. Változtassuk a megoldási módszert numerikusra.

💻 Nyomjuk meg a megoldás gombot.

```
#6:   NSOLVE(COS(2·x) + x = 0, x)

#7:                              x = -0.5149332646
```

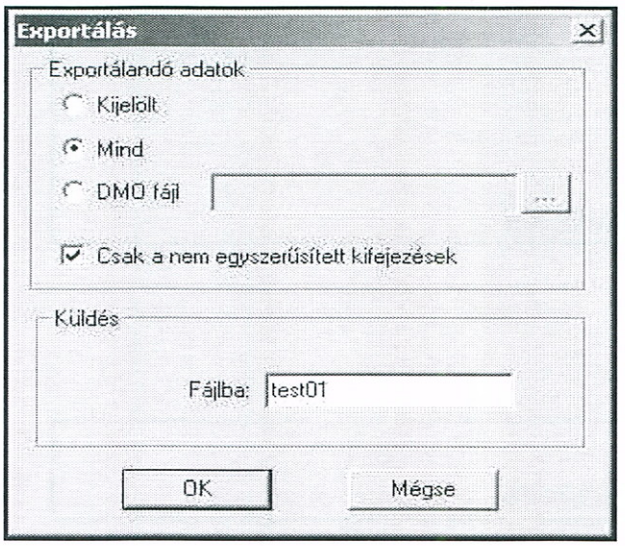
Exportáljuk ezt a részt a kézi számítógépre.

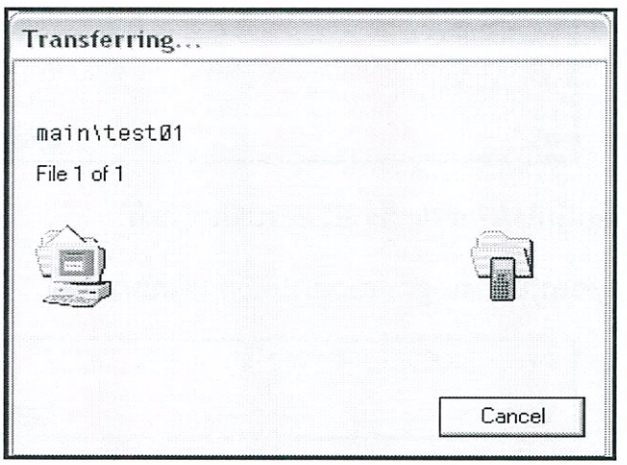
Csatlakoztassuk a kézi számítógépet a PC-hez, majd indítsa el az exportálást a **Fájl > Kézi számítógép > Exportálás** menüpont kiválasztásával.



Az adat egy text fájlba lesz exportálva (a Voyage200 ezt "text variable"-nek (szöveges változónak) nevezi). Általában a munkalap "input" kifejezéseit akarjuk csak exportálni, az egyszerűsített kifejezéseket nem. Ekkor a "csak a nem egyszerűsített kifejezések" melletti dobozt ki kell pipálni. Exportáljunk minden nem egyszerűsített kifejezést:

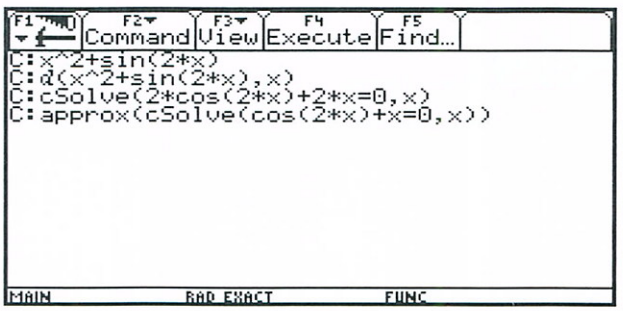
Válasszuk a Mind választógombot, a „Csak a nem egyszerűsített kifejezések" funkció legyen kipipálva, majd adjuk meg a fájl nevét, amelybe exportálni kívánunk (pl. test01)

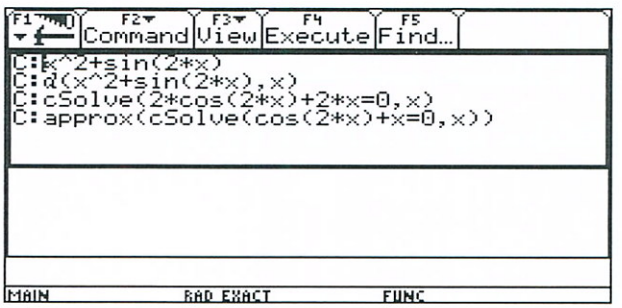




Az adat a kézi számítógépen van. Nyissuk meg a text editor-t és nyissuk meg a fájlt.:

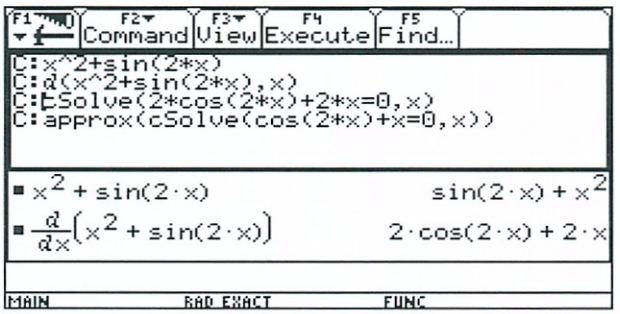
A **Voyage200**-on nyissuk meg a test01 szöveges változót (text variable) (bal kép), majd **F3 :View > ScriptView**.

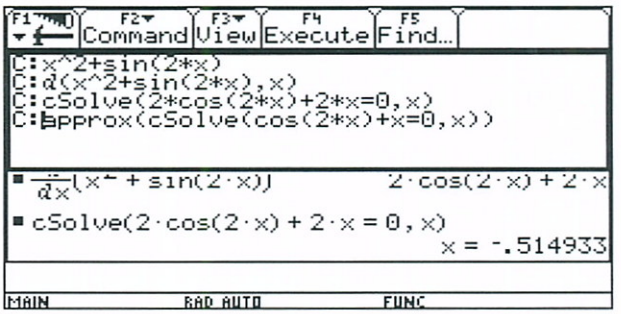




Ezek a **DERIVE** munkalap nem egyszerűsített kifejezései. Láthatjuk, hogy a **DERIVE**-ban szereplő SOLVE(2·COS(2·x)+2·x,x) kifejezést a **Voyage200** automatikusan átalakította Solve(2*cos(2*x)+2*x=0,x) alakra. A kézi számítógép más, kötöttebb szintaktikával dolgozik.

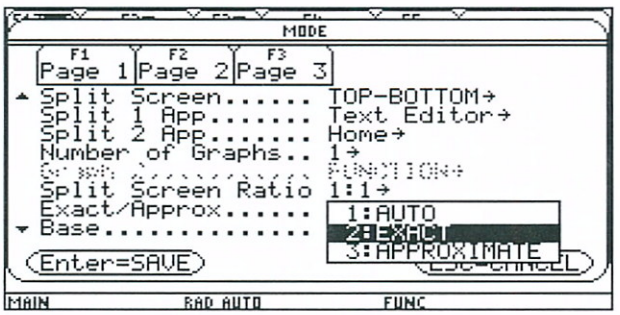
💻 Használjuk az **F4** gombot a futtatáshoz..

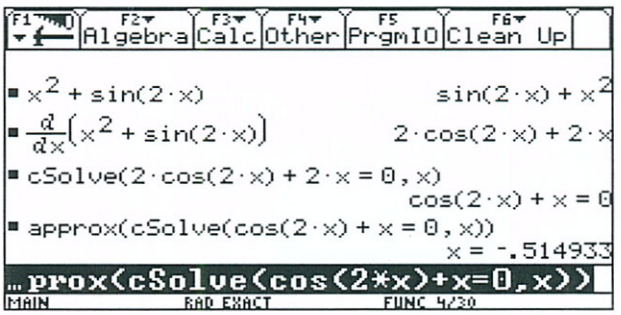




Amennyiben az alapértelmezett **AUTO** mód van bekapcsolva (ez azt jelenti, hogy ha egzakt megoldást nem talál, közelítő megoldást keres), akkor a fent látható közelítő megoldás lesz az eredmény. Amennyiben azt akarja, hogy a kézi számítógép a **DERIVE**-hoz hasonlóan működjön, akkor

💻 Váltsunk **EXACT** módba (bal kép). Töröljük az eddigi eredményeket, majd ismételjük meg a futtatást a harmadik és utolsó kifejezésre.

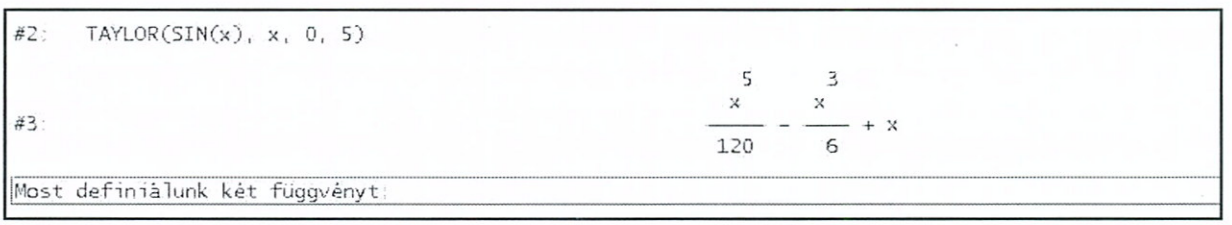




Zárjuk be a text editor-t. Az első exportálási példa végére ért.

A második példához nyissunk meg egy új **DERIVE** munkalapot:

💻 Írjuk be: *sin x*, számoljuk ki az ötödfokú Taylor polinomot x=0-nál (**Analízis > Taylor sorok** menüpont), majd szövegdobozba írjunk egy megjegyzést.



Majd írjunk be két függvénydefiníciót:

💻 1. *fact(n):=if(n=0,1,n*fact(n-1))*

2. *square(n):=prog(n:=n^2,n)*

```
        fact(n) :=
          If n = 0
#4:          1
             n·fact(n - 1)

        square(n) :=
          Prog
#5:          n := n^2
             n
```

Végül egy vektor:

Írjuk be és egyszerűsítsük: *vector(x^2,x,1,5)*. Számoljuk ki a vektor abszolút értékét: *abs(#7)*

```
                2
#6:    VECTOR(x , x, 1, 5)

#7:                                                  [1, 4, 9, 16, 25]

#8:    |[1, 4, 9, 16, 25]|

#9:                                                        √979
```

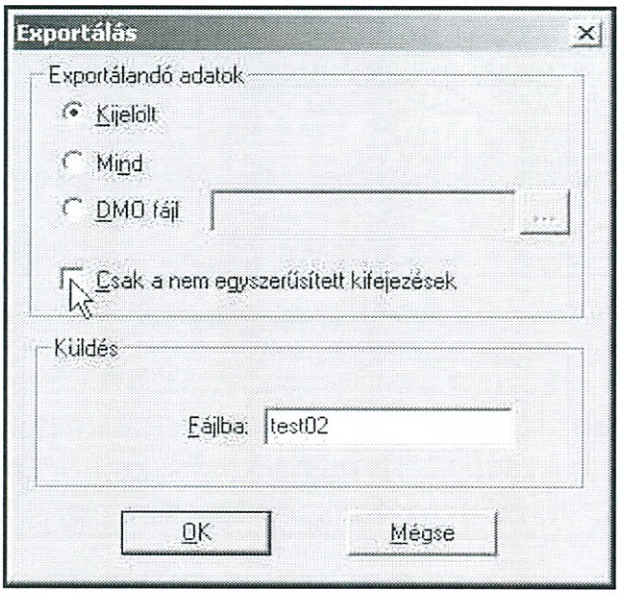
Válasszuk ki azokat a kifejezéseket, amelyeket exportálni szeretnénk:

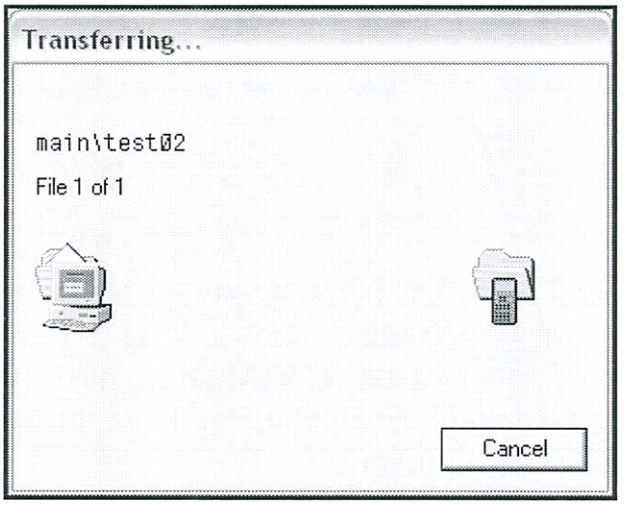
Jelöljük ki a következő kifejezéseket: #2, a szövegdoboz, #4, #5, #6, #7, és #8. (A 3. fejezetben található a többszörös kijelölés leírása)

```
#1:    SIN(x)

#2:    TAYLOR(SIN(x), x, 0, 5)

                                                        5      3
                                                       x      x
#3:                                                  ----- - ----- + x
                                                     120      6

Most definiálunk két függvényt:

        fact(n) :=
          If n = 0
#4:          1
             n·fact(n - 1)

        square(n) :=
          Prog
#5:          n := n^2
             n

                2
#6:    VECTOR(x , x, 1, 5)

#7:                                                  [1, 4, 9, 16, 25]

#8:    |[1, 4, 9, 16, 25]|

#9:                                                        √979
```

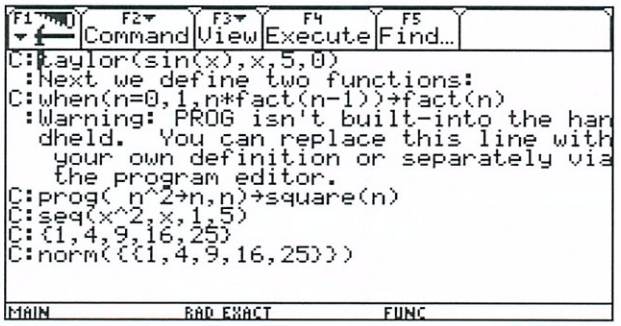
Exportáljuk a test02 fájlba:

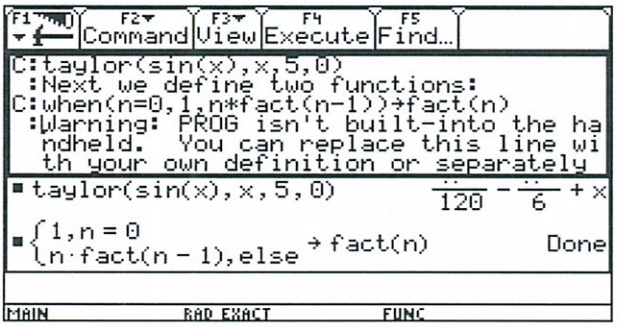
Válasszuk a **Fájl > Kézi számítógép > Exportálás** menüpontot, és válasszuk a **Kijelölt** funkciót. A **Csak a nem egyszerűsített kifejezések** funkció legyen kikapcsolva.





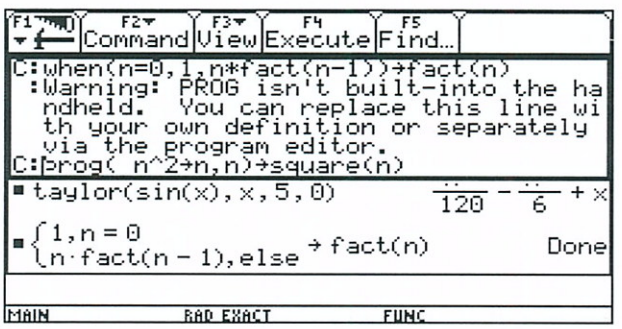
A **Voyage200** számítógépen nyissuk meg a test02 fájlt. Futtassuk az első három sort..

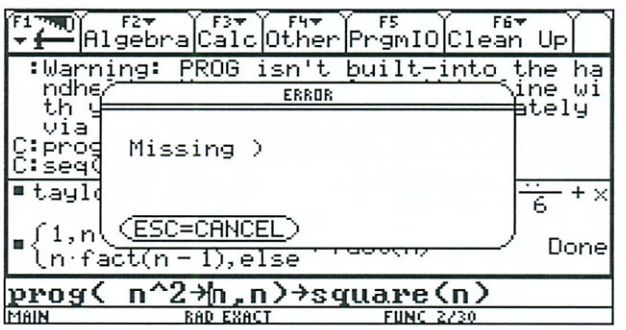




A **TAYLOR** kifejezés kicsit különbözik a **DERIVE** alakhoz képest. A **TAYLOR**(sin(x),x,0,5) **TAYLOR**(sin(x),x,5,0) alakra változott, a harmadik és negyedik argumentum felcserélődött. A második sor a szövegdoboz, amelyet a **DERIVE**-ban hoztunk létre. A harmadik kifejezés esetében az **IF** funkció **WHEN**-re változott, valamint a := operátor » jelként jelent meg.

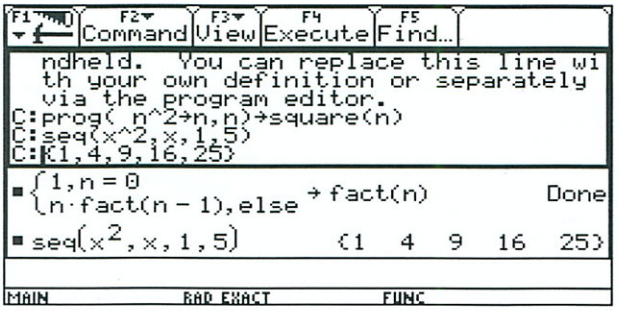
Futtassuk a negyedik és ötödik sort.

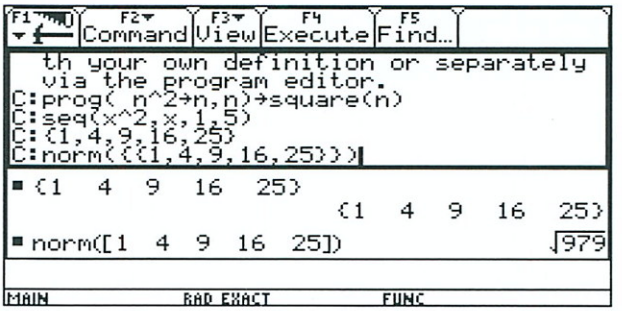




A negyedik sor egy figyelmeztető üzenet, hogy a **PROG** funkció, amely a **SQUARE** definíció része, nem fordítható. Tehát ennek a definíciónak a futtatása hibaüzenetet okoz. Általánosságban elmondhatjuk, hogy a többsoros kifejezések nem transzformálhatók a számítógépek között. A *syntax error* nem ignorálható, meg kell változtatni valamit a kifejezésben. Pl.: *n^2→square(n)*

Nyomjuk meg az ESC gombot, majd futtassuk az utolsó három sort.

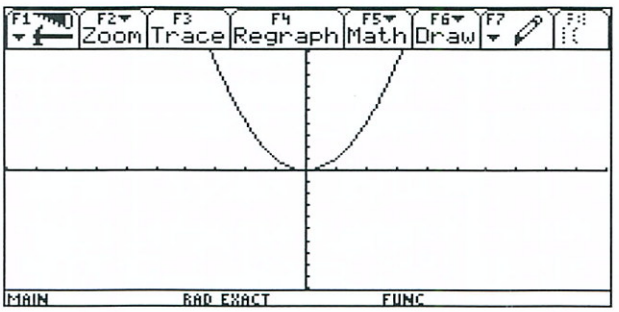


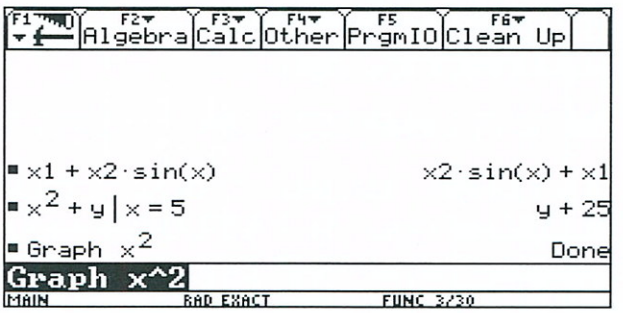


A **DERIVE VECTOR** funkciója **SEQ** funkció a kézi számítógépen. A **DERIVE**-ban a vektor nagyszögletes, míg a kézi számítógépen kerek zárójelek között található. Az abszolút értéket a **DERIVE**-ban az **ABS** funkció használatával, míg a kézi számítógépen a **NORM** funkció használatával lehet kiszámolni. A **NORM** funkció egy (itt egy soros) mátrixot vár inputként.

A következő feladat adat importálása **DERIVE**-ba. Hozzuk létre a kézi számítógépen a következő teszt fájlt:

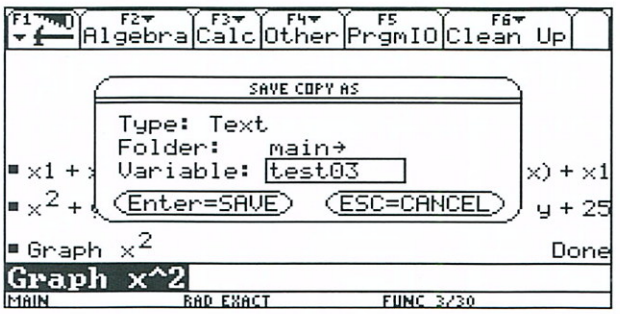
Töröljük a képernyőt, majd írjuk be: x1+*x2*sin(x), x^2+y|x=5, graph x^2*

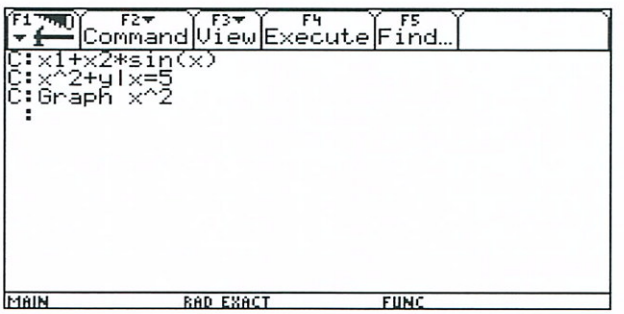




Mentsük el test03 néven.

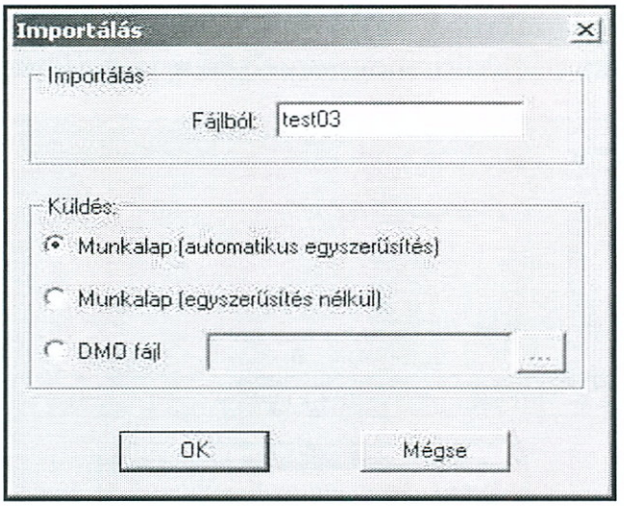
Használjuk az **F1** gombot**: Save Copy As** (mentés másként). Bal oldali kép.

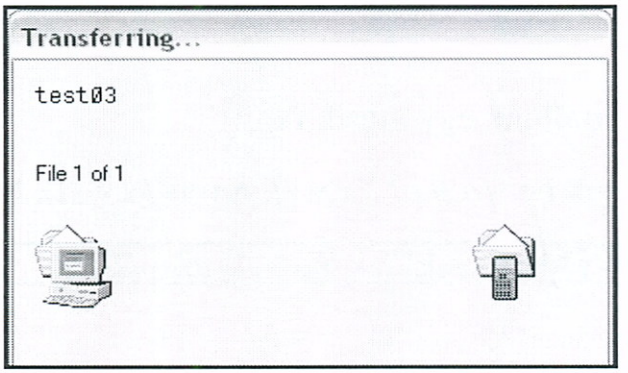




Most importáljuk a fájlt a **DERIVE**-ba:

Hozzunk létre egy új munkalapot, majd válasszuk a **Fájl > Kézi számítógép > Importálás** menüpontot. Majd írjuk be az importálandó fájl nevét (**Fájlból**). Használjuk az **Automatikus egyszerűsítés** funkciót).






```
#1:   x1 :=

#2:                                        x1 :=

#3:   x2 :=

#4:                                        x2 :=

#5:   x1 + x2·SIN(x)

#6:                                  x2·SIN(x) + x1

                2
#7:   SUBST(x  + y, x, 5)

#8:                                        y + 25

Highlight, then press appropriate toolbar graph button:

       2
#9:   x
```

A **DERIVE** minden importált kifejezést azonnal egyszerűsít. Importáljuk újra a fájlt, automatikus egyszerűsítés nélkül:

Hozzunk létre egy új munkalapot, majd válasszuk a **Fájl > Kézi számítógép > Importálás** menüpontot. Majd írjuk be az importálandó fájl nevét (**Fájlból**). Használjuk az **Egyszerűsítés nélkül** funkciót.

```
#1:   x1 :=

#2:   x2 :=

#3:   x1 + x2·SIN(x)

                2
#4:   SUBST(x  + y, x, 5)

Highlight, then press appropriate toolbar graph button:

       2
#5:   x
```

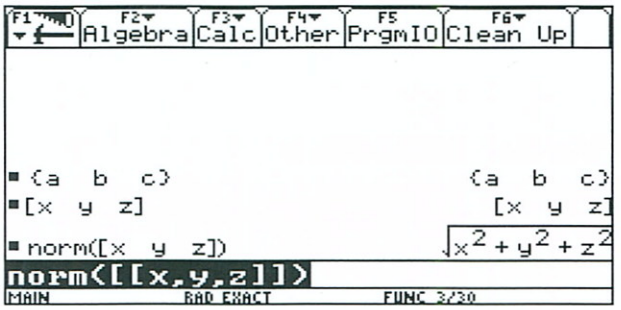
A **DERIVE** felajánlja a karakter és szó típusú input módokat, a **Voyage200** csak a Word módot használja. Hogy elkerüljük pl. az x1 és x2 változók "x * 1" és "x * 2" alakúvá importálását, használjuk az x1:= és x2:= üres értékadásokat.

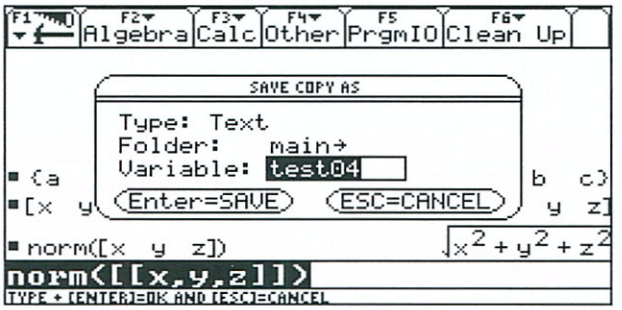
A | operátor a **DERIVE**-ban a **SUBST** függvénynek felel meg.

A **DERIVE**-ban a függvényábrázolásra nincs parancsszó vagy függvény, ezért a kézi számítógép **graph** kifejezését egy szövegdobozban jeleníti meg, amelyben leírja, hogyan ábrázolható a kijelölt függvény.

Importáljunk egy másik fájlt:

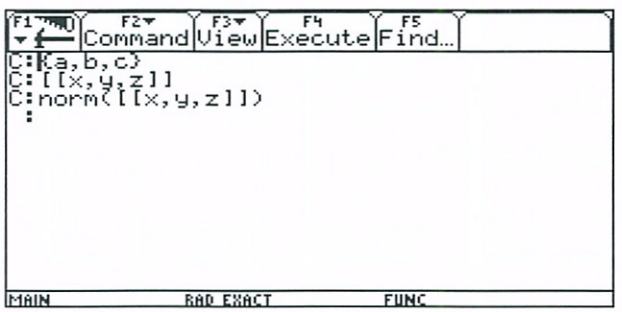
Írjuk be: *{a,b,c}, [x,y,z], norm([x,y,z])*. Mentsük test04 néven.

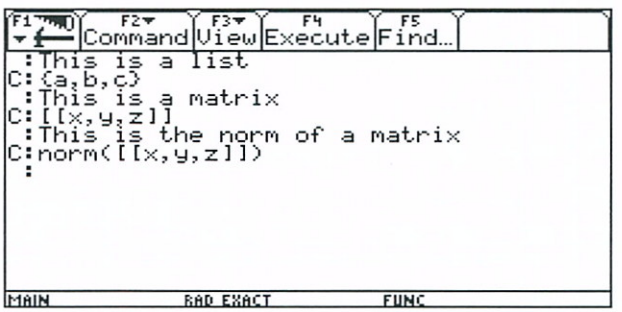




Adjunk hozzá leírásokat:

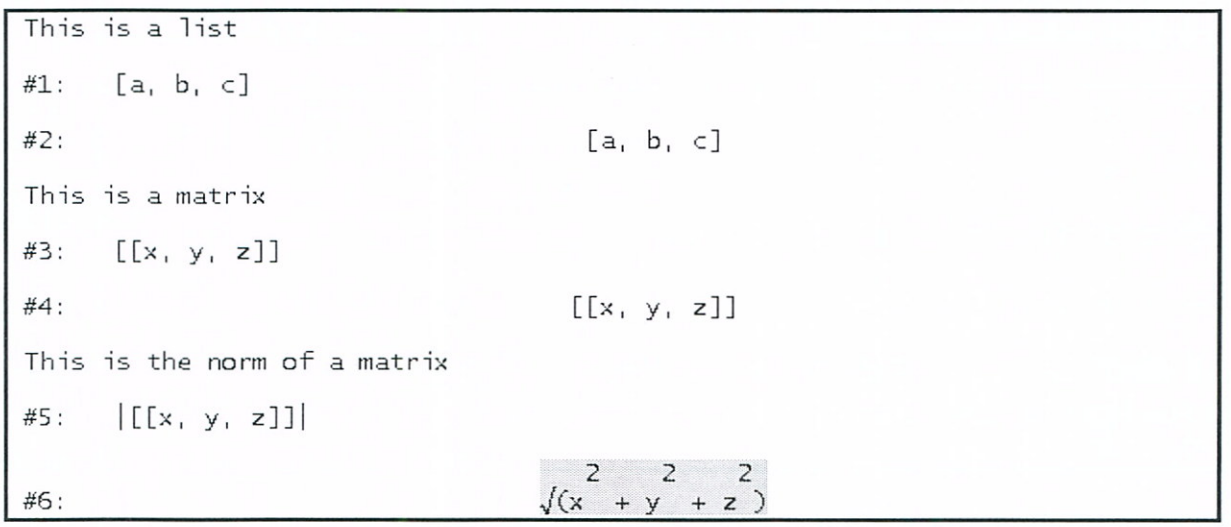
Nyissuk meg a **Text editor**-t (szöveg szerkesztő). Írjunk *This is a list* az első, *This is a matrix* a második és *This is the norm of a matrix* szöveget a harmadik kifejezés alá.





Importáljuk:

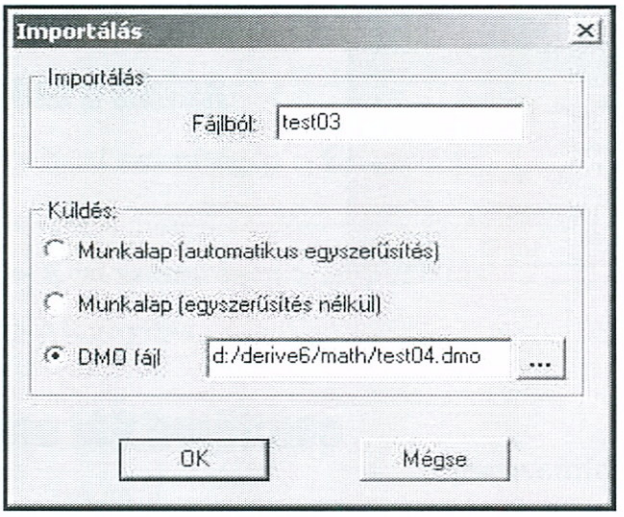
Nyissunk új munkalapot és importáljuk a test04 fájlt.



A szövegsorok automatikusan szövegdobozokba lesznek importálva.

Végül nézzük meg egy **demo** (**DMO**) fájl importálását:

Válasszuk a **Fájl > Kézi számítógép > Importálás** menüpontot, majd a test04 fájlt importáljuk egy test04 nevű demo fájlba (adja meg a teljes elérési útvonalat).



D:\Derive6\Math\test04.dmo saved

Nyissa meg az importált demo fájlt.

Nyissunk meg egy új munkalapot. Válasszuk a **Fájl > Betöltés > Demo fájl** menüpontot és nyissuk meg a test04.dmo fájlt..

#1: [a, b, c]

#2: [a, b, c]

This is a list 0.000s

Csak az első kifejezés lett importálva. A hozzá tartozó szöveg a **Status line**-ban jelenik meg.

Nyomjuk meg a gombot a második kifejezés importálásához.

#3: [[x, y, z]]

#4: [[x, y, z]]

This is a matrix 0.010s

Nyomjuk meg újra a gombot a harmadik kifejezés importálásához.

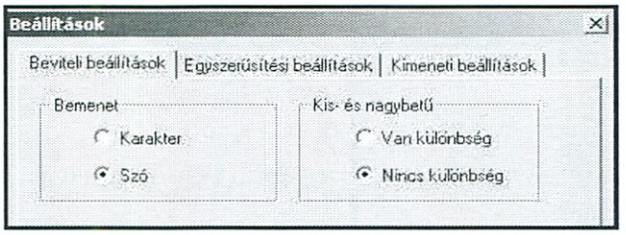
#5: |[[x, y, z]]|

#6: $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$

This is the norm of a matrix 0.000s

A gombot megnyomva importálásra kerül minden további kifejezés. Ez úgy működik, mint a kézi számítógép **F2 "Command > Execute to EOF" (Parancs > Fájl végéig végrehajt)** utasítása. A gomb megnyomásával megszakítható a demo fájl importálása.

A legjobb importálási eredményhez a **DERIVE** beviteli beállításait (**Beállítások > Beállítások > Beviteli beállítások**) állítsuk be a következőképpen: **Bemenet**: **Szó**, **Kis- és nagybetű**: **Nincs különbség**.



... és a kézi számítógép legyen **EXACT** módban.

További információkért forduljon **DERIVE** forgalmazójához.

Összefoglalás

Algebra ablak

Fájl > Kézi számítógép > Exportálás ..... **DERIVE** adatok exportálása TI-89 vagy Voyage200 típusokra

Fájl > Kézi számítógép > Importálás ..... TI-89 vagy Voyage200 típusokról adatok importálása

Fájl > Megnyitás ..... Demo fájl megnyitása

Demo fájl betöltése

..... új kifejezés betöltése és egyszerűsítése

..... demo fájl betöltésének megszakítása

..... minden további kifejezés betöltése és egyszerűsítése

17. fejezet

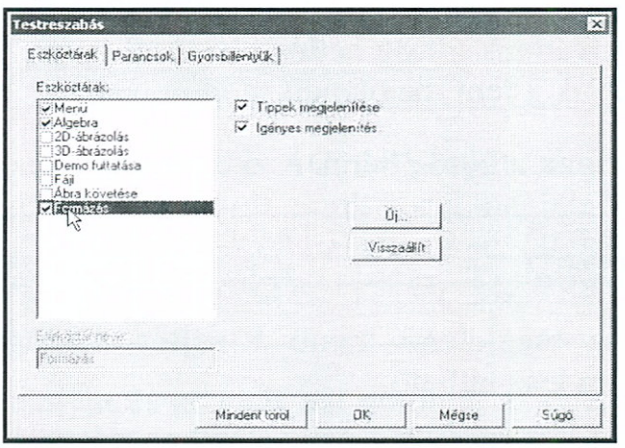
A DERIVE testreszabása személyes igényeinknek megfelelően

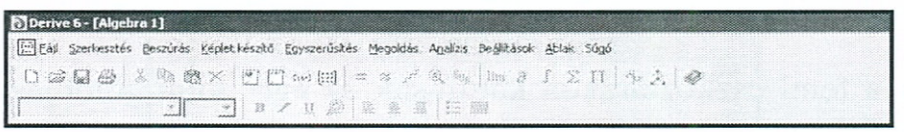
A **DERIVE** sok tanár és tanuló használja, mint tanítási és tanulási eszközt. Természetesen különböző felfogásban. Néhány tanár preferálja az elérhető lehetőségek csökkentését, ezáltal a tanulók nem zavarodnak össze a sok, általuk ismeretlen funkciók miatt. A **DERIVE 6**-ban lehetőség van a menük, eszköztárak és gyorsbillentyűk személyes igényeknek megfelelő beállítására. Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogyan lehet a **DERIVE**-ot testreszabni.

💻 Indítsuk a **DERIVE**-ot gyári beállításokkal.

Az első két fejezetben bemutattuk, hogyan lehet elérni a Formázás eszköztárat. Emlékeztetőül nézzük át újra:

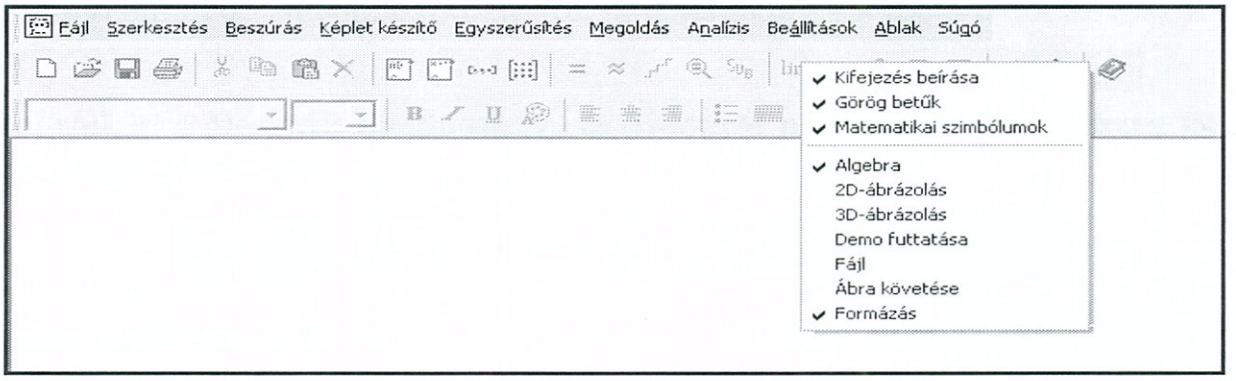
💻 Nyissuk meg az **Ablak > Testreszabás** menüpontot. A megjelenő dialógus ablakon pipáljuk ki a **Formázás** melletti négyzetet.





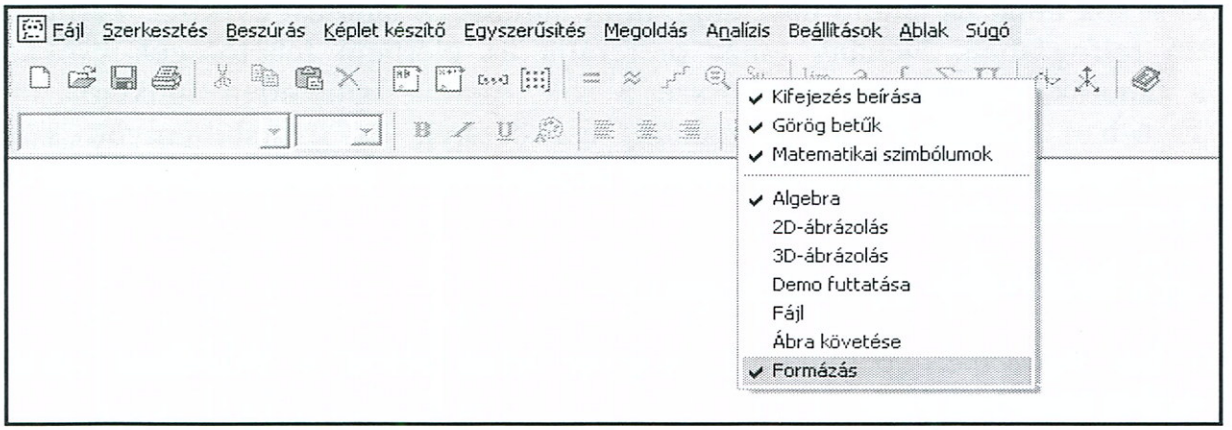
A formázás eszköztár megjelenik az algebra eszköztár alatt. Az előbb bemutatott módszerrel ezt bármikor eltűntethetjük, vagy újra bekapcsolhatjuk. De megtehetjük ezt az alábbi módon is:

💻 A felső eszköztárak bármelyikére kattintsunk az egér jobb gombjával.



A megjelenő legördülő menüben láthatjuk, hogy mely eszköztárak vannak bekapcsolva. A lista bármely elemére kattintva a hozzá tartozó eszköztár eltűntethető, illetve megjeleníthető.

💻 Kapcsoljuk ki a **Formázás** eszköztárat. Kattintsunk a **Formázás** menüpontra az egér bal gombjával.



Tételezzük fel, hogy nem kívánunk görög betűket használni, így a görög betűk eszköztárára nincs szükségünk. Elrejthetjük a fent megismert módon, vagy:

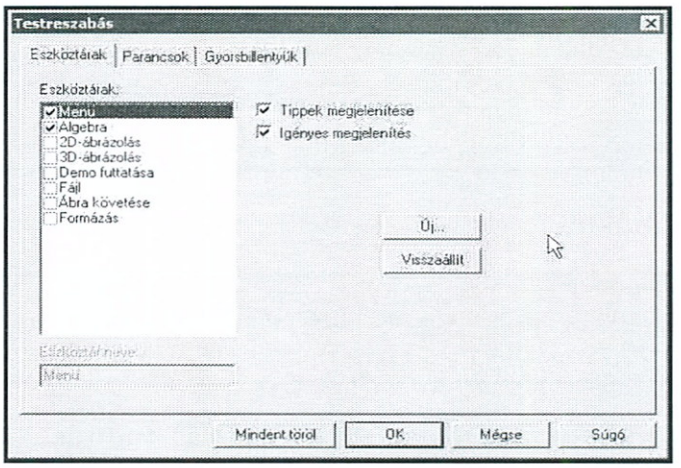
💻 ... jobb gombbal kattintsunk a görög betűk eszköztárán, ...

💻 ... majd kattintsunk a megjelenő menü **Elrejtés** menüpontjára. Így alul csak a matematikai jelek eszköztára lesz látható.

Megjelenítéséhez a fenti eszköztárakon kattintsuk az egér jobb gombjával és kattintsuk a **Görög betűk** menüpontra.

Nézzük, mit lehet még megváltoztatni:

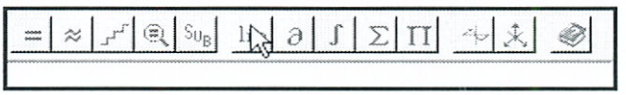
💻 Válasszuk az **Ablak > Testreszabás** menüpontot.



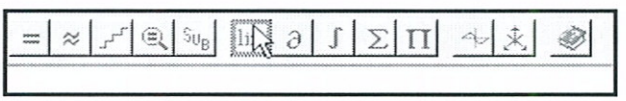
Ha **Tippek megjelenítése** funkció be van kapcsolva, akkor az egeret egyes gombok fölé mozgatva megjelenik a gomb funkciójának leírása. Az eszköztárak megjelenítésének kétféle stílusa közül választhat az **Igényes megjelenítés** funkció ki- illetve bekapcsolásával.

Nézzük, hogyan tudunk gombot rátenni vagy eltüntetni egy eszköztárról. Eltűntetéshez nem kell megnyitnunk a **Testreszabás** dialógusablakot. Gyorsabb az alábbi módszer:

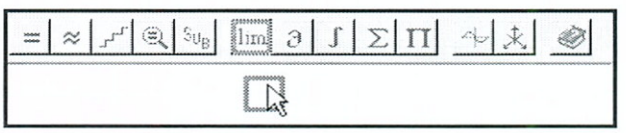
- A **Lim** (határérték) gomb eltüntetéséhez először menjünk az egérrel a gombra...



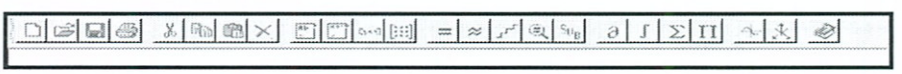
- ... nyomjuk le és tartsuk nyomva az ALT billentyűt, majd nyomjuk meg és tartsuk nyomva az egér bal gombját is (a választott gomb körül megjelenik egy keret)...



- ... nyomva tartva a billentyűt és az egér bal gombját az egér mozgatásával húzzuk le a gombot az eszköztárról, például a munkalapra.

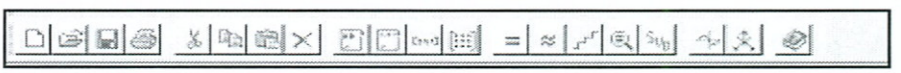


- Engedjük fel a gombokat (egér és ALT billentyű).



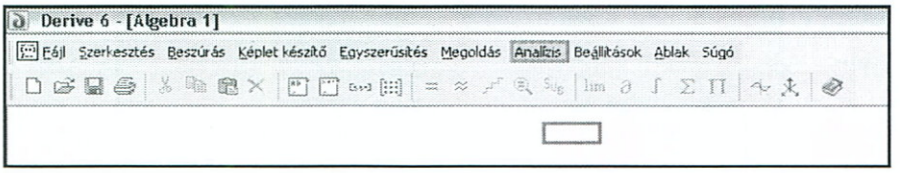
A **Lim** gomb eltűnt az algebra eszköztárról. Ismételjük meg a folyamatot az összes analízis gombbal:

- Távolítsuk el a **Derivált meghatározása**, **Integrál meghatározása**, **Összeg képzés** és **Szorzat képzés** gombokat.

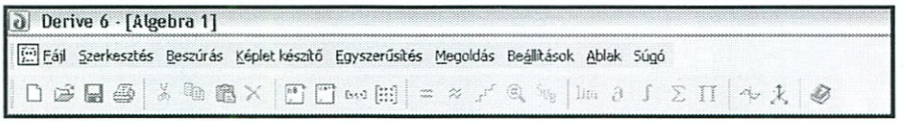


Ugyanezzel a módszerrel az **Analízis** menüpontot is eltüntethetjük az algebra menüsorról:

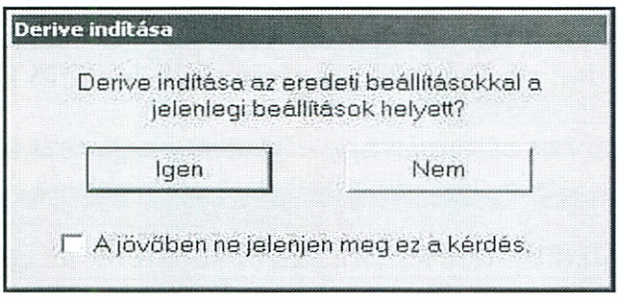
- Az ALT billentyű és az egér bal gombjának nyomva tartásával húzzuk le a menüpontot a munkalapra...



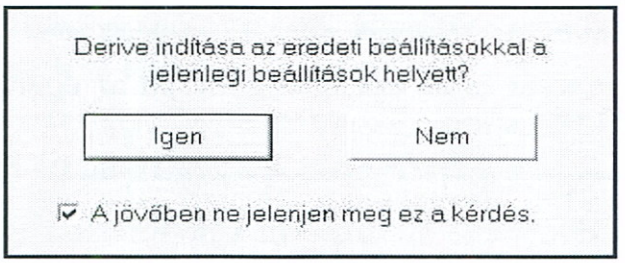
💻 ..., engedjük fel a gombokat.



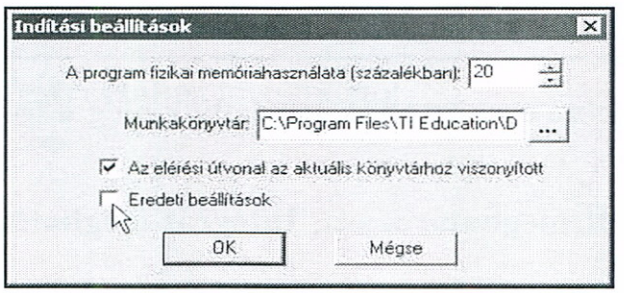
Ez a **DERIVE** analízis-mentes verziója. A **DERIVE** indításakor megjelenik az alábbi ablak:



Ha a NEM gombot választjuk, akkor az előző – kilépéskori – beállítások lépnek érvénybe (analízis-mentes **DERIVE**). Amennyiben az IGEN gombra kattintunk, úgy az eredeti, teljes funkcionalitású **DERIVE** indul el. Ha ez az ablak nem jelenik meg, akkor a **DERIVE** az előzőleg beállított módon indul. Ahhoz, hogy a jövőben a **DERIVE** ezen ablak megjelenése nélkül induljon, kattintsunk a **A jövőben ne jelenjen meg ez a kérdés** melletti négyzetre (pipáljuk ki):

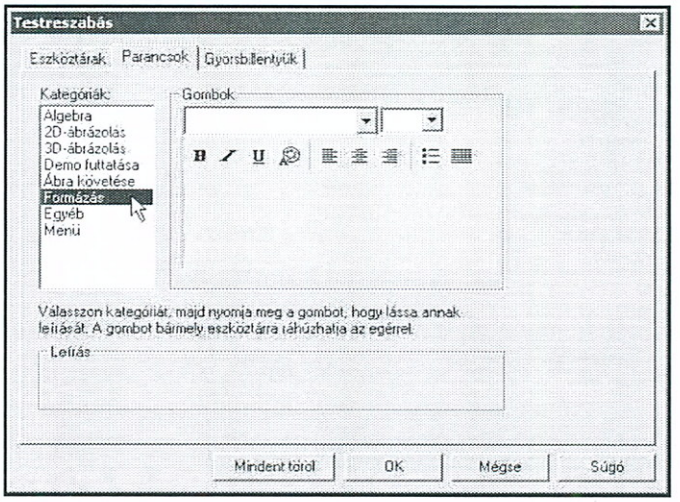


... vagy a **DERIVE**-ban a **Beállítások > Indítás** menüpontot választva a megjelenő dialógus ablakon az **Eredeti beállítások** funkciót kapcsoljuk ki.



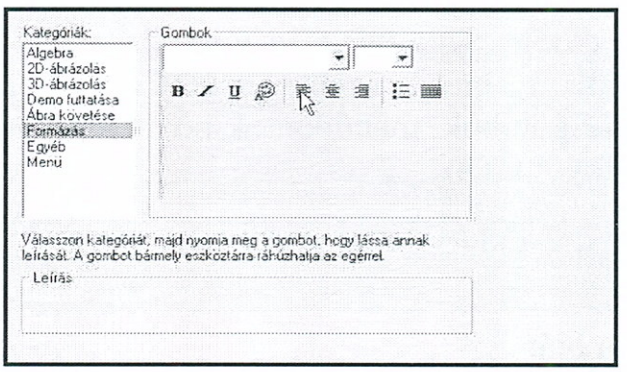
Nézzük, hogyan lehet új gombot helyezni egy eszköztárra:

💻 Válasszuk az **Ablak > Testreszabás** menüpontot. A megjelenő ablakon kattintsunk a **Parancsok** fülre. A kategóriák listából válasszuk ki a **Formázás**t.

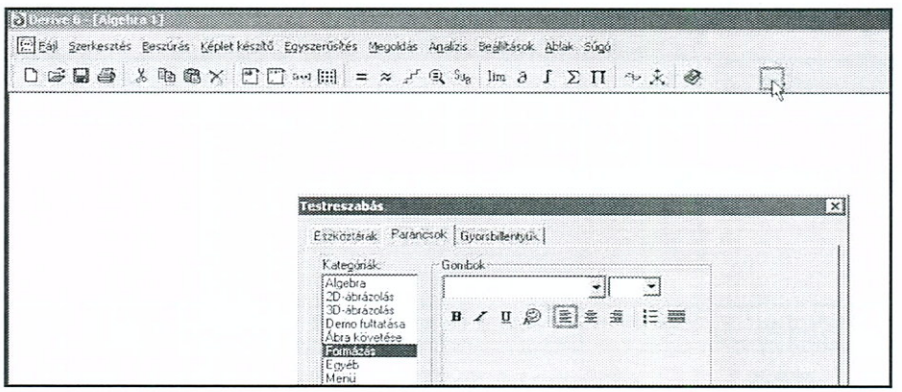


Tételezzük fel, hogy az eszköztárra rá szeretnénk tenni a **Balra igazítás**, **Jobbra igazítás** és **Középre igazítás** gombokat., melyekkel egy kifejezés pozicionálását szabályozhatjuk.

Az egérrel menjünk a **Balra igazítás** gombra, majd nyomjuk meg az egér bal gombját.



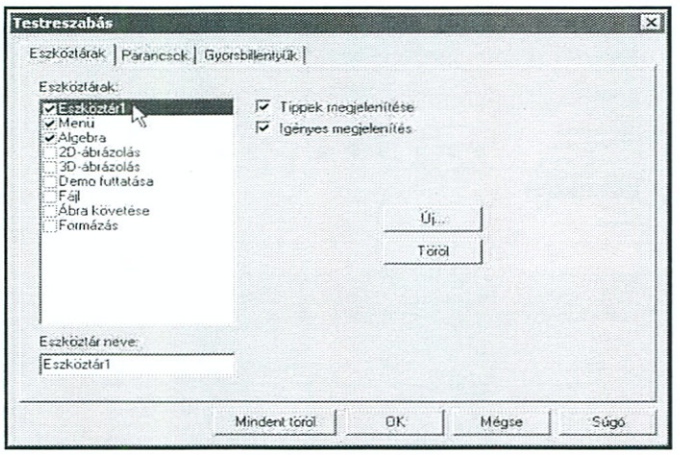
A gombot nyomva tartva húzzuk az egeret az algebra eszköztár jobb oldalára, a súgó gomb mellé (kb. 1 cm távolságra).



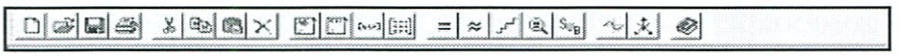
Engedjük fel az egér gombját.

Ezzel egy új eszköztárat hoztunk létre – ahelyett, hogy az algebra eszköztárra helyeztük volna a gombot. Töröljük ezt az eszköztárat:

A **Testreszabás** dialógus ablakon kattintsunk az **Eszköztárak** fülre. A listában szerepel a létrehozott, új elem **Eszköztár1** néven. Jelöljük ki.

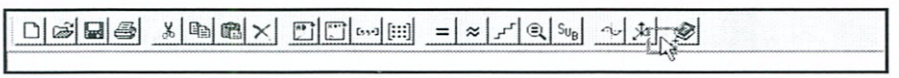


A TÖRÖL gombra kattintva töröljük ki.

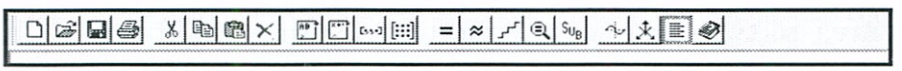


Próbáljuk újra:

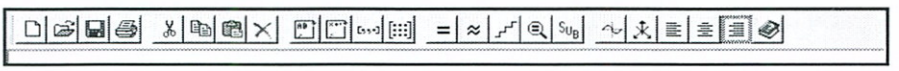
Váltsunk a **Parancsok** oldalra, jelöljük ki a **Formázás** elemet, majd húzzuk a **Balra igazítás** gombot közvetlenül az algebra eszköztár utolsó gombja elé. Ha a **Testreszabás** ablak meg van nyitva, akkor gombok, menüpontok hozzáadásához és eltávolításához nincs szükség az ALT billentyű lenyomására.



Engedjük fel az egér gombját.

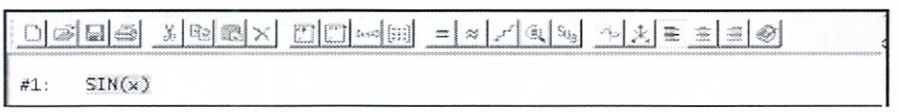


Ismételjük meg a fenti műveletet a **Jobbra igazítás** és **Középre igazítás** gombokkal is.

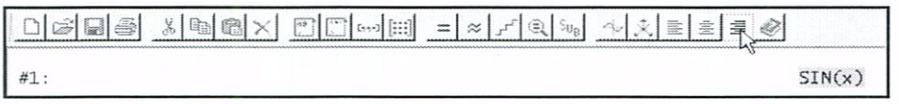


Próbáljuk ki az "új" funkcionalitásokat.

Írjuk be: *sinx*.

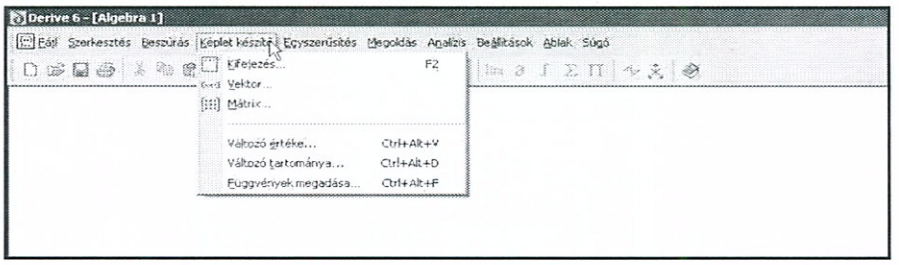


Nyomjuk meg a **Jobbra igazítás** gombot.



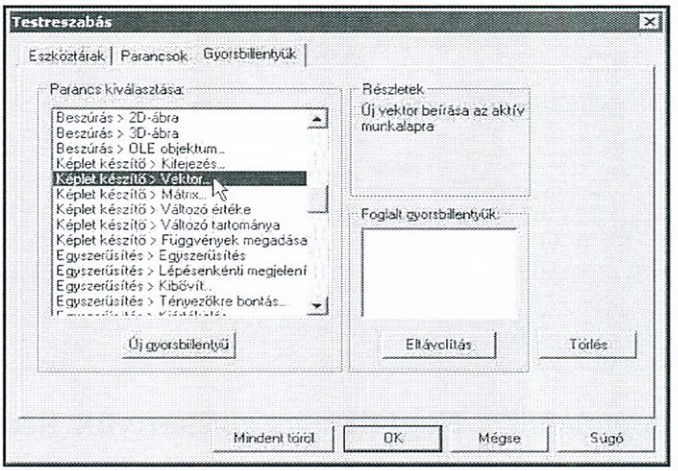
A gyorsbillentyűk beállításai ugyancsak módosíthatóak. Ahogy a **WINDOWS** programoknál megszokhattuk, a gyorsbillentyűk kombinációja látható a hozzájuk tartozó menüpont jobb oldalán.

Válasszuk a **Képlet készítő** menüpontot.



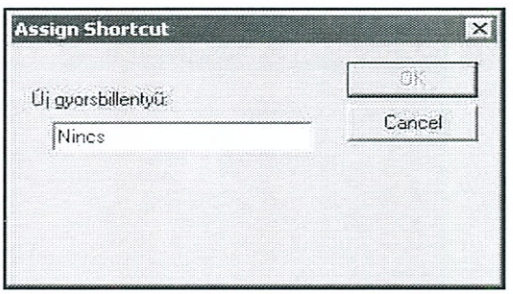
A **Képlet készítő > Vektor** menüponthoz nem tartozik gyorsbillentyű. Ha sokat használjuk ezt a menüpontot, gyorsbillentyű definiálása hasznos lehet. Nézzük, hogyan valósítjuk meg:

💻 Válasszuk az **Ablak > Testreszabás** menüpontot, kattintsunk a **Gyorsbillentyűk** fülre. Jelöljük ki a **Képlet készítő > Vektor** elemet a listában.

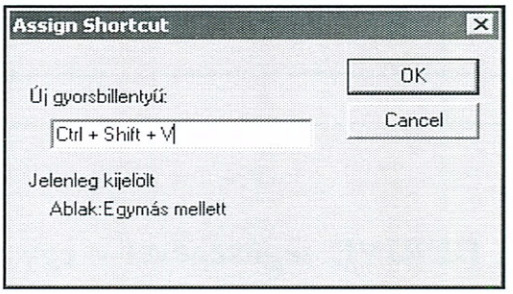


A **Foglalt gyorsbillentyűk** lista üres, amely azt jelenti, hogy ehhez a parancshoz nincs gyorsbillentyű definiálva.

💻 Nyomjuk meg az **Új gyorsbillentyű** gombot.

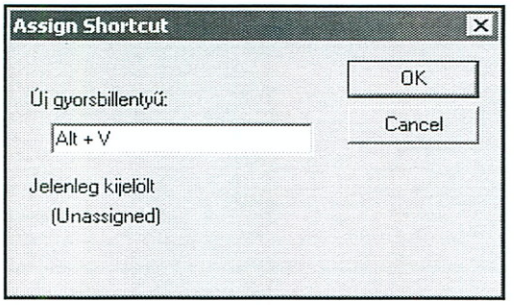


💻 Nyomjuk meg a CTRL, SHIFT és V gombokat egyszerre.



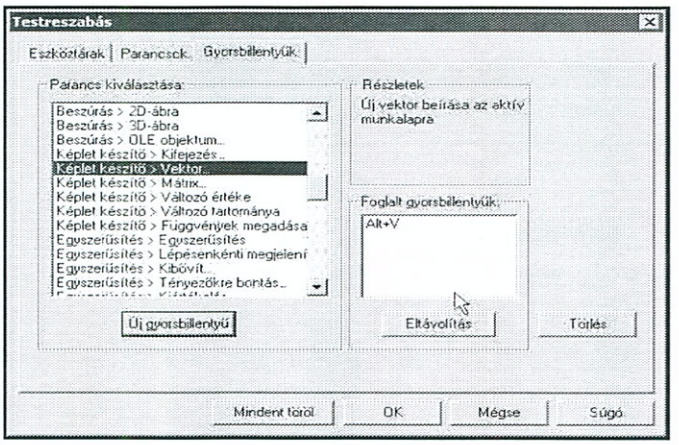
Ez a kombináció már foglalt (a **Jelenleg kijelölt** sor alatt láthatjuk, mely menüponthoz tartozik).

💻 Próbáljuk: ALT + V



Ez a billentyűkombináció szabad.

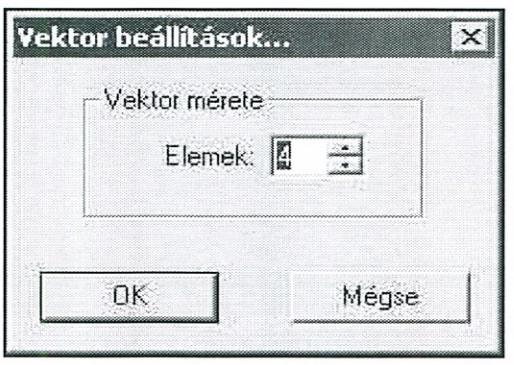
⌨ Nyomjuk meg az OK gombot.



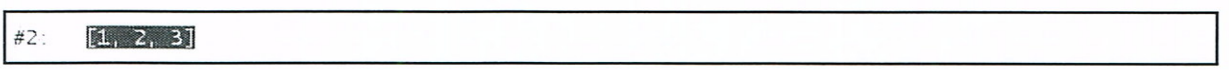
Az új kombináció már megjelenik a **Foglalt gyorsbillentyűk** listában a menüpont nevére kattintva.

Teszteljük: Használjuk az új kombinációt az [1,2,3] vektor megadásához:

⌨ Nyomjuk meg a MÉGSE gombot. A **Képlet készítő > Vektor** menüpontot választva ugyanez az ablak jelenik meg.



⌨ Elemek: 3, nyomjuk meg az OK gombot, írjuk be a három elemet, majd újra OK.



A matematika felfedezése – a **DERIVE** segítségével – egy végtelen történet. Változatos, szórakoztató, izgalmas és szép.

Jó szórakozást a DERIVE-hoz!

Összefoglalás

Algebra ablak

Ablak > Testreszabás ..... menük, eszköztárak és gyorsbillentyűk testreszabása

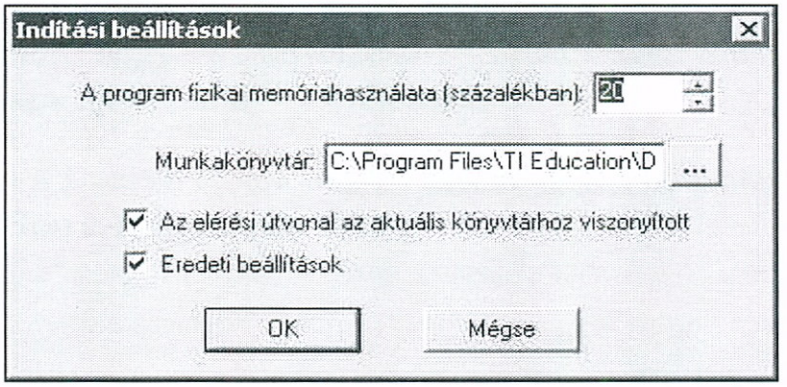
Jobb egérkattintás bármely eszköztár felett ..... eszköztárakat vezérlő menü

Jobb egérkattintás a görög betűk eszköztár felett ..... eszköztár elrejtése

ALT gomb és bal egérgomb nyomva tartása ..... gombok és menüpontok mozgatása, eltüntetése

Melléklet A : DERIVE indítási beállítások

Indítsuk el a **Beállítások>Indítás** menüpontot.

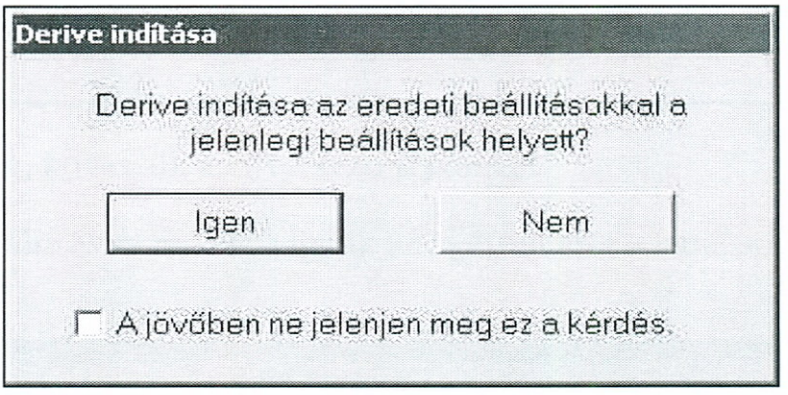


A **Program fizikai memóriahasználata (százalékban)** mezőben beállított érték határozza meg, hogy a DERIVE mekkora memóriát foglaljon le indításakor. Az alapértelmezett 20%-os beállítás elegendő memóriát biztosít más alkalmazások futtatásához. 20%-nál alacsonyabb érték megfelelő abban az esetben, ha a Derive egy hálózati szerveren fut.

A **munkakönyvtár** mezőben megadott könyvtárban fogja keresni a program a segédfájlokat. Ha egy segédfájlban definiált függvényt először hív meg a DERIVE, a fájl automatikusan betöltődik, és a függvényhívás rendesen kiértékelődik.

Az elérési út az aktuális könyvtárhoz viszonyított kapcsoló állapota határozza meg, hogy a fájlnevek hogy kerülnek megjelenítésre a menükben és a fejlécekben. Kapcsolja ki a kapcsolót, ha mindig a fájlok teljes elérési útjának megjelenítését szeretné.

Az **Eredeti beállítások** kapcsoló határozza meg, hogy a következő párbeszédablak megjelenjen-e a DERIVE indításakor:



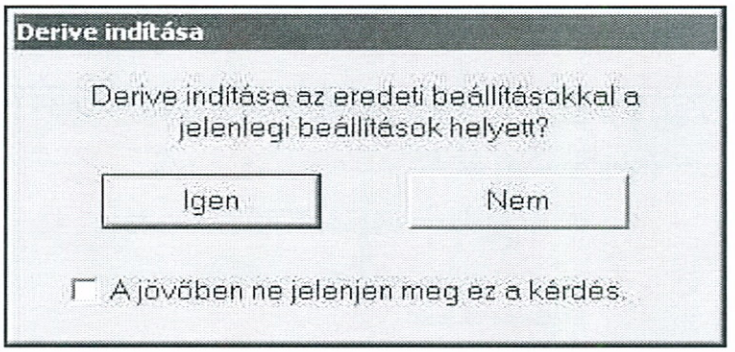
Különböző változtatások, mint például az ablak átméretezése, ábrázolási tartomány, színezés, háttérszín változtatása, vagy a változók aktuális értéke a **dfw.ini** inicializáló fájlban kerülnek eltárolásra. A fenti párbeszédablak akkor jelenik meg, ha az **Eredeti beállítások** kapcsoló be van kapcsolva. Itt eldönthetjük, hogy a DERIVE-ot az inicializáló fájl nélkül (azaz eredeti beállításokkal), vagy az inicializáló fájllal (tehát az utolsó használatkor elmentett változtatásokkal) indítjuk.

Melléklet B : DERIVE indítási beállítások

A következőkben részletes instrukciókat olvashatunk arról, hogyan lehet a DERIVE-ot az eredeti beállításokkal elindítani. Abban az esetben, ha a programot korábban más is használta már, ajánlott, hogy a következő instrukciókat hajtsuk végre, mielőtt végigolvasnánk a felhasználói kézikönyv 17 fejezetét.

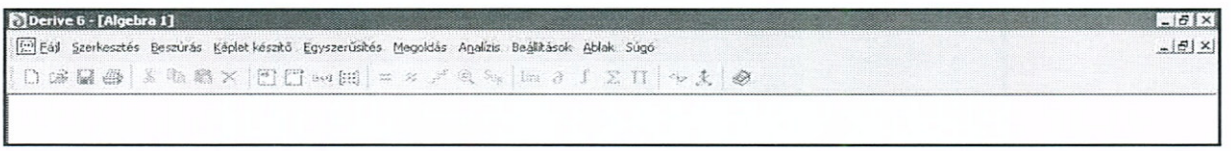
Indítsuk el a DERIVE-ot a DERIVE ikonra duplán kattintva. Ezt megtalálhatjuk az Asztalon, vagy a **Start** menüben **Start>Programok** között.

Ha megjelenik a ...



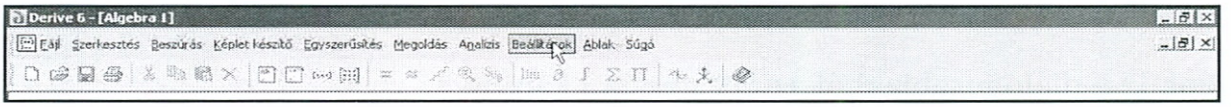
... kattintsunk az IGEN-re és folytassuk az 1. fejezettel.

Ha a ...

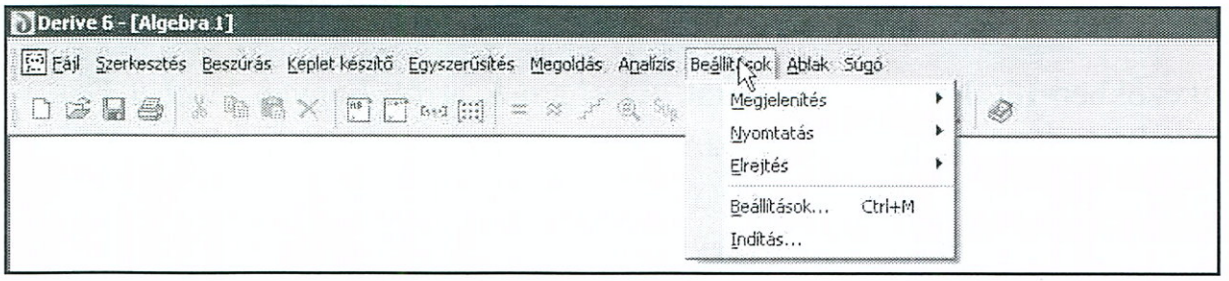


... képernyő jelenik meg, kövessük a következő lépéseket.

Készüljünk fel a **Beállítások** menüt, vigyük az egérmutatót a menüsor **Beállítások** parancsa fölé.

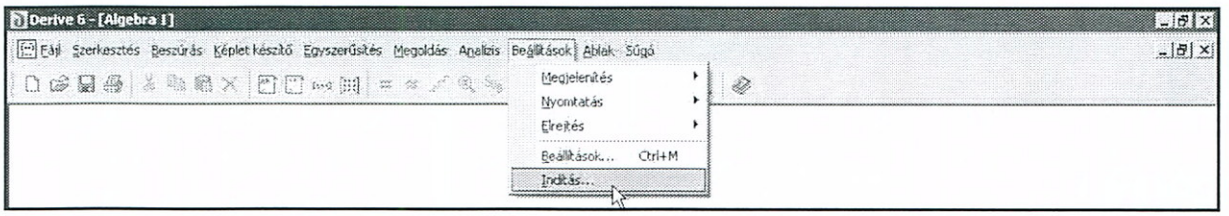


Nyissuk meg a **Beállítások** menüt a bal egérgombra kattintva

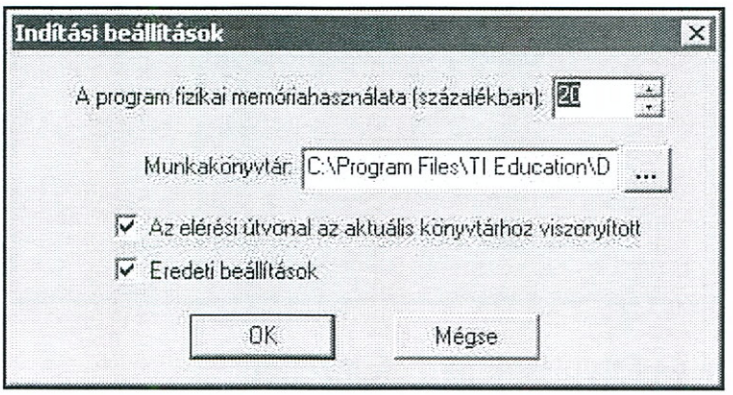


A menüben több parancsot láthatunk. Az **Indítás** parancs az utolsó.

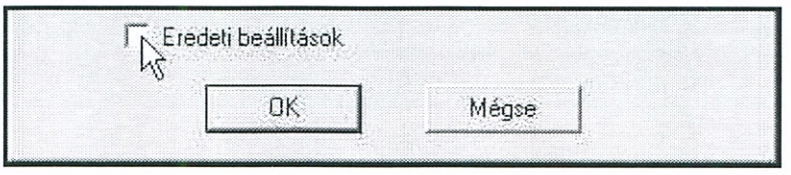
Válasszuk ezt a parancsot, vigyük az **Indítás** szó fölé az egérmutatót...



... majd bal egérgombbal rákattintva hívjuk meg a parancsot.



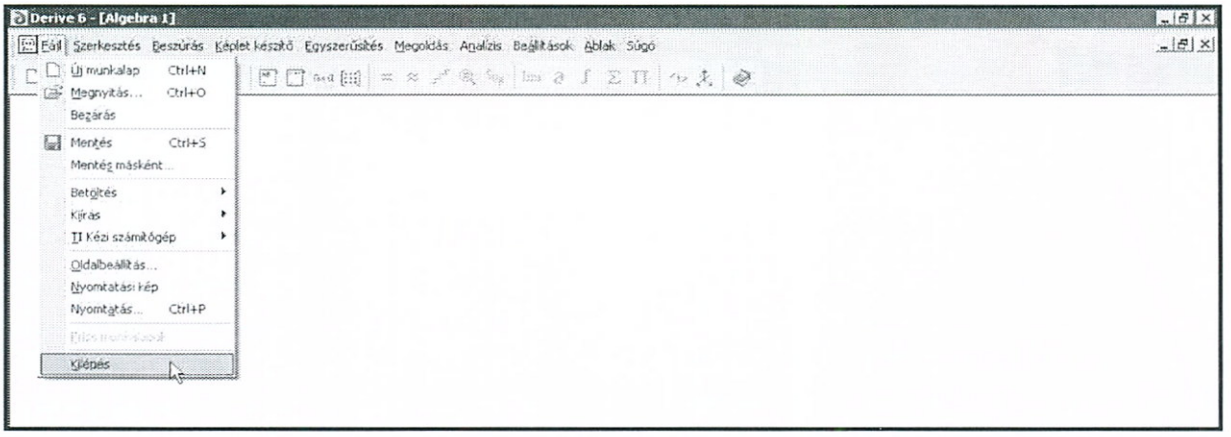
Vigyük a mutatót az **Eredeti beállítások** kapcsoló fölé...



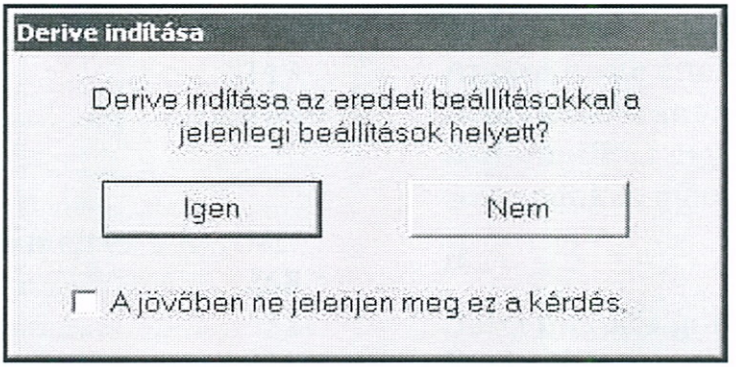
... és kattintsunk a bal egérrel a kapcsoló bejelöléséhez.

Lépjünk ki a dialógusablakból az OK gombra kattintva..

Lépjünk ki a DERIVE-ból a **Fájl>Kilépés** paranccsal...



... majd indítsuk újra a DERIVE-ot az Asztal DERIVE 6 ikonjával.



Válasszuk az IGEN-t, és folytassuk az 1. fejezettel.

Tárgymutató

← 5, 19, **110**
: .....
.....127
:= 63
↑ 6
↓ 6
° jel 134
2D-ábrázolás ablak.....24, 128
3D-ábrázolás
Mezők száma mező 113
3D-ábrázolás ablak **109**

A,Á

A jövőben ne jelenjen meg ez a kérdés **268**
Ablak 52
Ablak > Egymás mellett.....25
Ablak > Keret megjelenítése 52
Ablak > Megjelenítés 18
Ablak > Megjelenítés > Összes kifejezés betűtípusa 18
Ablak > Testreszabás.....17, 37, **78**, **265**
Ablak > Testreszabás > Gyorsbillentyűk **271**
Ablak > Új 2D-ábrázolási ablak 24
Ablak > Új 3D-ábrázolási ablak **119**
Ablak bezárása gomb **64**
Ábra elforgatása gomb **110**
Ábra kicsinyítése **111**
Ábra követése 28
Ábra követése eszköztár.....112
Ábra nagyítása gomb **111**
Ábra törlése gomb.....**115**
Ábrázolás **109**
Ábrázolás
Automatikus színek alapbeállítás..114
Ábrázolás
Vázlat.....115
Ábrázolás gomb 26
Ábrázolás színe.....**114**
Ábrázolási színek változtatása mód **91**
addíciós törvény 131
alfa.....11
Algebra ablak gomb 26
állapotsor.....3
állványozás módszere.....61
ALT + E.....13
Alt + PrtSc **181**
ALT+ENTER.....146
Analízis > Differenciálás.....**187**
Analízis > Határérték **96**, **185**, **197**
Analízis > Integrálás **197**
Analízis > Táblázat **101**
Analízis > Taylor sorok **255**
Analízis > Vektor.....**100**, **217**
Approximate érték.....77
Átalakítás iránya.....130
Automatikus egyszerűsítés funkció.**258**
Automatikus méretezés mód.....**110**

B

Balra forgatás gomb.....**110**
Basic fájl.....181
Beállítások > Ábrázolási tartomány > Hosszúság/középpont 30, **65**, **93**
Beállítások > Ábrázolási tartomány > Minimum/maximum 30, **93**
Beállítások > Beállítások Egyszerűsítési beállítások **76**
Mindent töröl.....**241**
Beállítások > Beállítások\ Egyszerűsítési beállítások **224**
Beállítások > Beállítások : Beviteli beállítások 62
Beállítások > Beállítások : Egyszerűsítési beállítások **131**
Beállítások > Beállítások: Kimeneti beállítások **237**
Beállítások > Elrejtés > Szövegek..**203**, **211**
Beállítások > Indítás 268
Beállítások > Képméretarány **64**
Beállítások > Koordináta-rendszer163, **229**
Beállítások > Megjelenítés.....17
Beállítások > Megjelenítés > Kifejezések újraszámozása.....50
Beállítások > Megjelenítés > Többsoros kifejezések bevitele..**146**, **247**
Beállítások > Nézőpont **111**
Beállítások > Nyomtatás.....39

Beállítások > Nyomtatás > Kifejezések elrendezése 40
Beburkolás gomb 78
Beillesztés gomb 51
beírás & egyszerűsítés gomb 9
beírás & kiértékelés gomb 9
Beírás és egyszerűsítés gomb 8
beírás gomb 9
Bemenet mező 62
Beszúrás > Megjegyzés **97**
Beszúrás > OLE Objektum **235**
Beszúrás > Szöveg objektum 13, 16
Beszúrás > Vonalzó **104**
Betűméret 15
bevitel helyessége 9
Beviteli beállítások **237**
beviteli eszközsor 3
Buchberger 68

C

C fájl 181
CaseMode változó 63
Célkereszt 26
célkereszt koordinátái 35
Célkereszt középre gomb 32
Ciklus 247
címsor 3
Collect érték 131
Command > Execute to EOF 261
CTRL + ↵ 60, **99**
CTRL + ↑ 28
CTRL + → 28, 29
CTRL + ↓ 28
CTRL + ← 28, 29
CTRL + 1 27
CTRL + C 51, **181**
CTRL + E 20
CTRL + F6 26
CTRL + I 20
CTRL + P 19
CTRL + Q 11
Ctrl + Shift + M **182**
CTRL + SHIFT + V 271
CTRL + V 51
CTRL + X 51, **182**
CTRL+SHIFT+↑ 51
CTRL+T **148**

Cs

Csak a nem egyszerűsített kifejezések funkció **256**
Csúsztatás közben ábra frissítése opció **106**

D

DEL 5
demo (DMO) fájl importálása 260
Derivált meghatározása gomb **187**
DfW fájl **171**
dfw kiterjesztés 41
DIB fájl 181
differenciálegyenlet megoldása 197
dupla kattintás metódusa 45

E,É

e 19, 20
egyenletmegoldás 59
egyenlőtlenség megoldás 59
Egyszerűsítés 8
Egyszerűsítés > Egyszerűsítés 13
Egyszerűsítés > Kibővít 47
Egyszerűsítés > Kiértékelés 14, **75**
Egyszerűsítés > Lépésenkénti megjelenítés **203**
Egyszerűsítés > Részkifejezés behelyettesítése 49
Egyszerűsítés > Tényezőkre bontás .. 54
Egyszerűsítés > Változó behelyettesítése 48
egyszerűsítés gomb 9
Egyszerűsítés nélkül funkció **259**
Egyszerűsítési beállítások dialógusablak **75**
egyszerűsített kifejezés 18
eljárás programozásnak 249
ellentmondásos egyenlet 61
Elrejtés menü 266
ENTER 4, **147**
Eredeti beállítások kapcsoló 268
eredeti kifejezés 18
Értéktartomány beállítása gomb 33
Eszköztárak fül **269**
Exact üzemmód 77

F

F1 258
F10 ..... **103**
F2 19, 36, 261
F3 28, 36, 254
F4 48, **255**
F7 **222**
F9 118

Fájl > Beágyazás 27, **162**
Fájl > Betöltés > Adat fájl 246
Fájl > Betöltés > Demo fájl 261
Fájl > Betöltés > Segéd fájl **170, 173**
Fájl > Bezárás **64**
Fájl > Exportálás **181**
Fájl > Kézi számítógép > Exportálás **254**
Fájl > Kézi számítógép > Importálás **258**
Fájl > Kiírás **181**
Fájl > Kilépés 20
Fájl > Megnyitás **172**
Fájl > Mentés másként 40
Fájl > Nyomtatás **181**
Fájl > Nyomtatási kép **181**
Fájl > Oldalbeállítás **181**
Fájl > Új munkalap 51
Fájl> Nyomtatási kép 38
felező merőleges egyenlete 168
felezőpont 167
Felfelé forgatás gomb **110**
Foglalt gyorsbillentyűk **271**
forgatási mátrix 215
Formázás eszköztár 14
Formázás kapcsoló 15
Fortran fájl 181
Főérték **225**
funkcionális programozás 249

G

geometria 167
görög abc eszköztár 3

H

halmaz 151
Használja minden ábrázolás ezeket a beállításokat kapcsoló **157**
Határérték kiszámítása párbeszédablak 97
Határérték meghatározása **96**
Határérték meghatározása gomb **185**
Határozatlan integrál **193**
Határozott integrál **194**
hatványhalmaz 152
hCross 35
Henger gomb **163**
HOME 28

I,Í

i 19
Igényes megjelenítés **267**
inf127
Integrál meghatározása gomb **193**
Integrálás **193**

J

Jegyek száma mező 76
Jobbra forgatás gomb **110**
Jobbra igazítás gomb 37
JPEG fájl 181

K

Karakter mód 62
Képlet készítő > Függvények megadása **174**
Képlet készítő > Mátrix **146**
Képlet készítő > Változó értéke 150
Képlet készítő > Változó tartománya **124**
Képlet készítő > Változó tartománya **127**
Képlet készítő > Változó tartománya **138**
Kétirányú határérték 185
Kettes számrendszer 242
Kibővítés 12
Kicsi méretű pont 91
Kiértékelés 6, **75**
kiértékelés gomb 9
Kifejezés ábrázolási tulajdonságai . **114**
Kifejezés beírása 13
Kifejezés beírása gomb 4, 7
Kifejezés beszúrása 48
Kifejezés megjelenítése **238**
kifejezés megoldása 59
Kifejezések újraszámozása 50
Kiírási mód **239**
Kis- és nagybetű **237**
Kis- és nagybetű mező 62
Kiszámítási idő mező 40
Kivágás gomb 51
Komplex felbontás 55
konjunkció művelet 70
Következő szín menü 91
Közelítés függőlegesen **222**
Közelítés függőlegesen gomb 33
Közelítés gomb 31, **117**
Közép 26
Közepes méretű pont 91
különbség 152

L

Lefelé forgatás gomb **110**
Lépésenként kapcsoló 205
Lépésenkénti megjelenítés gomb **203**
Lépésköz mező 100
Lépték 26
logikai **és** operátor **70**
logikai tagadás művelet 134
logikai **vagy** művelet 37

M

Másolás gomb 51
matematikai jelek eszköztára 3
Math könyvtár **250**
mátrix 146
Mátrix beírása **146**
Mátrix beírása gomb 146
Megadott Pont mező 185
Megjegyzés beszúrása gomb **97**
Megjegyzés mező 40
Megjelenítési beállítások
Doboz **118**
Szín 119
Tengelyek **118**
Megjelenítési lehetőségek 28
Megjelenítési lehetőségek > Ábra követése 28, **66**, **112**
Megjelenítési lehetőségek > Célkereszt követése 30
Megjelenítési lehetőségek > Egyszerűsítés ábrázolás előtt **95**
Megjelenítési lehetőségek > Kiértékelés ábrázolás előtt **95**
Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés **90**
Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Célkereszt 28
Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Pontok **91**, **139**
Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > **Szín** **102**
Megjelenítési lehetőségek > Megjelenítés > Tengelyek **100**
Megjelenítési lehetőségek > Új ábra automatikus méretezése **110**
Megjelenítési lehetőségek > Új ábra automatikus méretezése 126
Megjelenítési lehetőségek > Új ábrákhoz megjegyzés **102**
Megjelenítési lehetőségek > Valós és képzetes rész **221**
Megnyitás **172**
Megoldás > Kifejezés 36
Megoldás > Rendszer **66**
Megoldás gomb 36, 59, 63
Megoldás módszere **83**
Megoldás tartománya **84**
Megoldás változói mező 63
menüsor 3
metszet 152
Mód mező 76
Mth fájl **171**

N

Nagy méretű pont 91
Nagyít gomb 39
négyzetgyökjel 11
Nézőpont megadása **111**

Ny

Nyomtatás gomb 40

O,Ó

Objektum törlése 10
OLE objektum **235**
Origó középre 30

Ö,Ő

Összekötés mező **139**

P

Paraméteres ábrázolás
Ábrázolási mód mező 155
Maximális érték mező 155
Paraméteres ábrázolás **155**
Paraméteres ábrázolás
Minimális érték mező 155
parancs eszköztár 3
Pascal fájl 181
PgDn **111**
PgUp **111**
pi 19
Pontméret **144**
Pontosság **239**
Pontosság mező 76
Pozíció mező 98
program tesztelése 249
PrtSc **181**
pszeudo-véletlenszám generátor **245**

R

Racionális mód 240

rácsméret beállítása ... 113
Rend mező ... 187
részkifejezés ... 43
részkifejezések kijelölése ... 44

S

Sajnos a kifejezés nem ábrázolható hibaüzenet ... 94
Save Copy As ... **258**
SHIFT + → ... 46
SHIFT +→ ... **112**
SHIFT+↓ ... 45
sorozat ... 87
sorozat definiálása ... 88
Status line ... **261**
Súgó > Index ... **149**
Súgó > Súgó ... **148**

Sz

Számrendszer alapja ... **237, 242**
Szerkesztés > Ábra törlése ... **115**
Szerkesztés > Ábrázolás ... **112**
Szerkesztés > Beillesztés ... 51
Szerkesztés > Grafikus ablak másolása ... **182**
Szerkesztés > Kifejezés ... 24
Szerkesztés > Kijelölés és másolás .. **182**
Szerkesztés > Kivágás ... 51, **182**
Szerkesztés > Másolás ... 51, **181**
Szerkesztés > Minden vonalzó törlése ... **106**
Szerkesztés > Mindent kijelöl ... **72**
Szerkesztés > Összes ábra törlése ... **90**
Szerkesztés > Összes **megjegyzés törlése** ... **104**
Szerkesztés > Törlés visszavonása ... 56
Szó mód ... 62
szorzás műveleti jele mező ... **239**
Szög ... 134
Szöveg beírása gomb ... 16
Szöveg beszúrása ... 6
Szöveg beszúrása gomb ... 7
Szöveg mező ... 98

T

TAB ... 11, **147**
TARGA fájl ... 181
Távolítás ... **120**
Távolítás függőlegesen gomb ... 53
Távolítás gomb ... 31
text variable ... 254
TI Connect® software ... **253**
TI-89 ... **253**
TI-92+ ... **253**
TIFF fájl ... 181
Tippek megjelenítése ... **267**
Tizenhatos számrendszer ... 242
Tízes mód ... 240
Tízes számrendszer ... 243
Transzformációs szabály megjelenítése ... **211**
Trig. hatvány ... 130
Trigonometrikus ... 130
Tudományos mód ... 240

U,Ú

Új érték mező ... 48
Új gomb ... 51
Új gyorsbillentyű gomb ... 271
Új objektum igazítása ... 17
unió ... 152
Users könyvtár ... **250**
Utolsó ábra törlése ... **90**

V

Valós és képzetes rész ábrázolása ... **223**
Változó behelyettesítése ... 48
Változó behelyettesítése dialógusablak 48
Változó mező ... 187
Változó tartománya
Értékkészlet mező ... 124
Intervallum mező ... 124
Változó tartománya
Változó neve mező ... 124
Változók mező ... 48
Van különbség gomb ... 62
vCross ... 35
Vegyes mód ... 240
vektor ... 87
Vektor beállítások
Elemek mező ... 137
vektor elemszáma ... 249
Vektor kezdőérték mező ... 100
Vektor végérték mező ... 100
vektorok belső szorzata ... 138
vektorok kereszt szorzata ... 138
véletlen szám ... 243, **245**
View > ScriptView ... **254**
visszatöröl gomb ... 5
Vonaltípus
Pontok ... 140
Szaggatott ... 140

Vonaltípus **140**
Vonaltípus
Vonal 140
Vonalzó
Intervallumok mező 105
Maximum érték mező 105
Változó neve mező 105
Vonalzó
Minimum érték mező 105
Vonalzó
Helyi menü 106
Voyage200 ..... **253**

Π

π közelítése 77

Magyar változat:
Új Calculus Számítógép-alkalmazási Bt.
Budapest

www.calculus.hu
derive@calculus.hu

TEXAS INSTRUMENTS

Texas Instruments U.S.A.
7800 Banner Drive
Dallas, Texas 75251

CE

©2003 Texas Instruments

ti-cares@ti.com
education.ti.com/derive

DERIVE/OM/1L3/B
080503